Picard, Émile
Notice sur les travaux scientifiques

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Émile PICARD,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GŒTTINGUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. ÉMILE PICARD,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GŒTTINGUE

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

LISTE CHRONOLOGIQUE DES MÉMOIRES PUBLIÉS.

1. Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1877).
2. Sur une classe de fonctions transcendantes (*Comptes rendus*, 1878, premier semestre).
3. Sur une classe de surfaces algébriques (*Bulletin de la Société philomathique*, 1878).
4. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques (*Comptes rendus*, 1878, second semestre).
5. Sur les équations différentielles du second ordre (*Comptes rendus*, 1878, second semestre).
6. Sur une classe de fonctions non uniformes (*Bulletin de la Société mathématique*, 1879).
7. Sur une propriété des fonctions entières (*Comptes rendus*, 1879, premier semestre).
8. Sur une application de la théorie des fonctions elliptiques (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).
9. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).
10. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (*Comptes rendus*, 1880, premier semestre).
11. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (*Journal de Crelle*, t. 90).
12. Sur une classe de courbes gauches (*Comptes rendus*, 1880, premier semestre).
13. Sur les fonctions entières (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).
14. Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).
15. Mémoire sur les fonctions entières (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1880).
16. Sur les fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).

17. Sur une propriété de certaines fonctions analogues aux fonctions algébriques (*Comptes rendus*, 1879, second semestre).

18. Sur certaines équations linéaires du second ordre (*Comptes rendus*, 1880, premier semestre).

19. Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel (*Comptes rendus*, 1880, premier semestre).

20. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann, relatif aux séries hypergéométriques (*Comptes rendus*, 1880, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1881).

21. Sur une propriété des fonctions et des courbes algébriques (*Comptes rendus*, 1880, second semestre).

22. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable et sur une classe d'équations différentielles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. IV, 1880).

23. Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles (*Comptes rendus*, 1881, premier semestre; deux Notes).

24. Sur quelques exemples singuliers de réductions d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques (*Comptes rendus*, 1881, second semestre).

25. Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels (*Comptes rendus*, 1881, premier semestre).

26. Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles (en commun avec M. *Appell*; *Comptes rendus*, 1881, premier semestre).

27. Sur la réduction des intégrales abéliennes (*Comptes rendus*, 1881, second semestre).

28. Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes (*Comptes rendus*, 1881, second semestre).

29. Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

30. Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres (*Mathematische Annalen*, 1882).

31. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, et sur un groupe de substitutions linéaires (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

32. Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires (*Acta mathematica*, t. II).

33. Sur un groupe de substitutions linéaires (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

34. Sur l'intégration par les fonctions abéliennes de certaines équations aux

dérivées partielles de premier ordre (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

35. Sur certaines formes quadratiques ternaires (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

36. Sur les fonctions uniformes affectées de coupures (*Comptes rendus*, 1882, premier semestre).

37. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes (*Comptes rendus*, 1882, second semestre).

38. Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires (*Acta mathematica*, t. I).

39. Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes, en particulier dans le cas des courbes du second genre (*Bulletin de la Société mathématique*, 1883).

40. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes (*Comptes rendus*, 1883, premier semestre).

41. Sur une propriété concernant les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883).

42. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires (*Comptes rendus*, 1883, premier semestre).

43. Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1884).

44. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les groupes discontinus correspondants (*Comptes rendus*, 1883, second semestre).

45. Sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu (*Comptes rendus*, 1883, second semestre).

46. Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions $2n$ fois périodiques de n variables (en commun avec M. *Poincaré*; *Comptes rendus*, 1883, second semestre).

47. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques (*Bulletin de la Société mathématique*, 1884).

48. Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques (*Bulletin de la Société mathématique*, 1884).

49. Sur les substitutions linéaires (*Comptes rendus*, 1884, premier semestre).

50. Sur la transformation des points de l'espace situés du même côté d'un plan (*Bulletin de la Société mathématique*, 1884).

51. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes (*Acta mathematica*, t. V).

52. Sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Comptes rendus*, 1884, premier semestre).

53 Sur une nouvelle généralisation des fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, 1884, premier semestre).

54 Sur une classe de fonctions abéliennes et sur un groupe hyperfuchsien (*Comptes rendus*, 1884, premier semestre).

55 Sur les formes quadratiques quaternaires indéfinies et les groupes hyperabéliens correspondants (*Comptes rendus*, 1884, premier semestre).

56 Sur les équations linéaires et les groupes algébriques de transformation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. I).

57 Sur les intégrales différentielles totales (*Comptes rendus*, 1884, second semestre).

58 Sur un théorème de M. Darboux (*Comptes rendus*, 1885, premier semestre).

59 Sur le groupe de certaines équations différentielles linéaires (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885).

60 Sur certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Comptes rendus*, 1885, premier semestre).

61 Sur les intégrales de seconde espèce et sur les fonctions hyperfuchsiennes (*Comptes rendus*, 1885, premier semestre).

62 Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1885).

63 Mémoire sur les fonctions hyperabéliennes (*Journal de Mathématiques*, 1885).

64 Mémoire sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce (*Journal de Mathématiques*, 1885).

65 Sur les intégrales de seconde espèce (*Comptes rendus*, 1885, second semestre).

66 Sur les périodes des intégrales doubles (*Comptes rendus*, 1886, premier semestre).

67 Sur le calcul des périodes des intégrales doubles (*Comptes rendus*, 1886, premier semestre).

68 Mémoires sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce (*Journal de Mathématiques*, 1886).

69 Sur la transformation des surfaces en elles-mêmes (*Comptes rendus*, 1886, second semestre).

70 Sur la transformation des surfaces en elles-mêmes et sur un nombre fondamental dans la théorie des surfaces (*Comptes rendus*, 1886, second semestre).

71 Sur une classe d'équations différentielles (*Comptes rendus*, 1886, second semestre).

72 Sur les surfaces admettant une double infinité de transformations birationnelles (*Comptes rendus*, 1886, second semestre).

73 Sur un point de la théorie générale des équations différentielles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1887).

74. Sur une classe d'équations différentielles (*Comptes rendus*, 1887, premier semestre).

75. Sur les séries hypergéométriques de deux variables (*Bulletin de la Société mathématique*, 1887).

76. Sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables (*Bulletin de la Société mathématique*, 1887).

77. Sur une classe de surfaces algébriques (*Journal de Crelle*, t. 100).

78. Théorème général sur les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Acta mathematica*, t. XI).

79. Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888).

80. Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles de second ordre (*Comptes rendus*, 1888, second semestre).

81. Sur la transformation de Laplace et les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (*Comptes rendus*, 1888, second semestre).

82. Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées et les fonctions fuchsiennes (*American Journal of Mathematics*, t. XI).

83. Sur une proposition générale concernant les équations linéaires aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, 1888, second semestre).

84. Sur un théorème relatif à l'attraction (*Comptes rendus*, 1888, second semestre).

85. Mémoire sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre (*Acta mathematica*, t. XII).

86. Sur les intégrales multiples relatives à trois variables complexes (*Comptes rendus*, 1889, premier semestre).

87. Sur quelques expressions quadruplement périodiques (*Comptes rendus*, 1889, premier semestre).

88. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1889).

89. Mémoire sur certaines expressions quadruplement périodiques (*Bulletin de la Société mathématique*, 1889).

90. Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (couronné par l'Académie des Sciences, grand prix des Sciences mathématiques de 1888) (*Journal de Mathématiques*, 1889).

Ouvrage d'enseignement.

91. Cours d'Analyse professé à la Faculté des Sciences de Paris (1886-87), publié par l'Association des Élèves et anciens élèves de la Faculté des Sciences.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Émile PICARD.

Afin d'introduire quelque ordre dans l'exposé des travaux dont on va lire une rapide analyse, j'ai dû adopter une classification; je me suis arrêté à la distinction suivante en quatre parties :

1° Équations différentielles;
2° Étude algébrique et arithmétique des transformations et des groupes;
3° Théorie des fonctions;
4° Théorie des surfaces algébriques.

Une telle classification est nécessairement défectueuse par quelque endroit, et j'ai plus d'une fois hésité dans le choix du Chapitre auquel je devais rapporter tel ou tel Mémoire. Mais cet inconvénient ne saurait être évité; c'est qu'en effet aujourd'hui, dans les Sciences mathématiques, les théories les plus diverses se pénètrent en se prêtant un mutuel appui, et il n'est pas rare de voir se rencontrer dans une même étude la Géométrie, le Calcul intégral, la Théorie des fonctions et même la Théorie des nombres. Cette synthèse, où viennent se rejoindre les notions en apparence les plus étrangères, fait le grand intérêt de la Science actuelle. Citons, entre bien d'autres exemples, la géométrie des courbes algébriques et la théorie des intégrales abéliennes, qui toutes deux s'éclairent et se complètent mutuellement. N'en va-t-il pas d'ailleurs de même dans tous les ordres de recherches? C'est ainsi, par exemple, qu'on voit les rapprochements entre les diverses parties de la Physique devenir chaque jour plus intimes. Pour ce qui concerne mes recherches personnelles, mes travaux sur les surfaces algébriques m'ont été du plus grand secours dans l'étude des équations différentielles, et j'ai aussi tiré grand parti pour la théorie des fonctions de certaines propriétés arithmétiques des formes algébriques. Je me permettrai d'appeler spécialement l'attention sur les théorèmes généraux concernant les fonctions uniformes d'une variable, et sur mes études relatives aux fonctions de plusieurs variables indépendantes, particulièrement aux fonctions hyperfuchsiennes et aux fonctions algébriques de deux variables. Ces dernières recherches, qui intéressent également la Géométrie et l'Analyse, nous ont montré les différences profondes et quelquefois inattendues qui séparent la théorie des fonctions d'une variable de celle de plusieurs variables.

PREMIER CHAPITRE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Théorèmes généraux sur les équations différentielles ordinaires.

La théorie des équations différentielles a fait depuis longtemps l'objet d'un très grand nombre de recherches; on peut dire qu'il n'est pas, dans le domaine des Sciences mathématiques, de théorie dont les progrès soient plus désirables, puisque c'est en général à l'intégration de telles équations que se ramène l'étude de tout problème, tant en Géométrie qu'en Mécanique et Physique mathématique. Les points de vue nouveaux introduits dans la Science par Cauchy, Riemann et leurs disciples, ont déjà permis de réaliser, dans cet ordre, d'importants progrès.

La première proposition que l'on rencontre dans cette théorie est relative à l'existence des intégrales. Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où l'on suppose que $f(x, y)$ soit une fonction holomorphe de x et y, quand x et y restent respectivement à l'intérieur de cercles C et C' ayant respectivement pour centre x_0 et y_0, et pour rayon a et b; soit de plus M le module maximum de f quand les variables décrivent ces circonférences. Cauchy avait le premier établi que, dans ces conditions, il y avait une intégrale de l'équation, holomorphe dans le voisinage de x_0 et prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0. Briot et Bouquet avaient donné comme rayon du cercle, où l'intégrale est certainement holomorphe, l'expression

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right).$$

J'ai montré (79) qu'on pouvait trouver pour la limite de convergence certaine de la série une limite plus étendue. Voici le résultat auquel j'arrive : la série converge certainement à l'intérieur du cercle ayant pour rayon la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$. Que ce soit l'une ou l'autre de ces quantités que l'on doive prendre, on aura une limite supérieure à celle qu'ont donnée Briot et Bouquet.

Prenons maintenant un système d'équations différentielles du premier ordre, résolu par rapport aux dérivées et où les seconds membres seront des fonctions holomorphes de la variable indépendante et des fonctions dans le voisinage de certaines valeurs initiales; ces équations admettent un système d'intégrales holomorphes et prenant pour une valeur initiale de la variable des valeurs initiales données. Existe-t-il d'autres intégrales satisfaisant à ces conditions, que les intégrales holomorphes. Briot et Bouquet démontrent qu'il n'y en a pas d'autres, mais en se bornant au cas d'une seule équation, et la méthode qu'ils suivent ne paraît pas, au premier abord, susceptible de s'étendre au cas général. C'est une lacune que j'ai voulu combler, en restant dans le même ordre d'idées; un artifice convenable permet de transformer le problème de manière à pouvoir suivre ensuite la marche de Briot et Bouquet (73). J'insiste de plus sur un point que laissent un peu dans l'ombre ces géomètres, à savoir ce qu'on doit entendre dans cette question par intégrales prenant en un point donné une valeur donnée.

Nous avons jusqu'ici donné à la variable indépendante des valeurs quelconques. La forme des intégrales des équations différentielles dans le voisinage des points singuliers serait extrêmement importante à connaître; Briot et Bouquet, dont il faut toujours citer les Mémoires classiques quand on parle de ces matières, ont fait une étude approfondie des équations différentielles du premier ordre, quand le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ se présente sous forme indéterminée pour un certain système de valeurs de x et y. Une question analogue se présentait pour les équations du second ordre; j'ai considéré (4) l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

où je suppose que la fonction holomorphe f s'annule pour $x = 0$, $y = \alpha$, $y' = \beta$. Nous nous sommes proposé d'étudier les intégrales de cette équation qui prennent la valeur α et dont la dérivée est égale à β pour $x = 0$. Ce qui m'a tout d'abord intéressé dans cette question, c'est qu'elle est autre chose qu'une extension facile du problème traité par Briot et Bouquet pour le premier ordre; je n'ai pas pu en effet suivre longtemps ici la méthode qui avait réussi à ces géomètres, et les difficultés qui se sont rencontrées ont eu cette heureuse conséquence de me forcer à rechercher la *forme* analytique des intégrales que j'étudiais, tandis que les précédents auteurs s'étaient bornés à démontrer, dans le cas du premier ordre, l'existence de ces intégrales. Désignons par b la valeur de $\frac{\partial f}{\partial y'}$ pour $y = \alpha$, $y' = \beta$ et $x = 0$. Si b n'est pas un entier positif, l'équation différentielle proposée admettra une intégrale remplissant les conditions requises et holomorphe dans le voisinage de $x = 0$. Si b a sa partie réelle positive, l'équation admet une infinité d'intégrales non holomorphes.

Pour démontrer ce point important, j'ai recours à un procédé qui peut être employé dans d'autres circonstances : il consiste à remplacer les équations différentielles *à une seule variable* que l'on a à étudier par des équations convenablement choisies *aux dérivées partielles*. C'est ainsi que j'établis que les intégrales non holomorphes se présentent sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x et x^{b-1} (on peut toujours supposer que la partie réelle de b, quand elle est positive, est supérieure à l'unité).

Nous étudions (5) le cas où la partie réelle de b est négative, et nous établissons qu'alors il n'existe pas d'autre intégrale, remplissant les conditions requises, que l'intégrale holomorphe. Les considérations employées permettent de plus de compléter le théorème précédemment établi : dans le cas où la partie réelle de b est positive, il n'y a pas d'autres intégrales de l'équation différentielle, remplissant les conditions requises, que celles qui sont fournies par les développements en séries dont j'ai parlé plus haut (17). Dans le cas où b est un nombre entier positif, on peut encore représenter les intégrales par des séries, mais elles sont de forme différente et procèdent suivant les puissances de x et $x \log x$.

Les méthodes suivies pour les équations du second ordre sont nécessairement applicables dans le cas des équations du premier ordre; il suffit alors de supposer que f ne dépend pas de y. On peut ainsi compléter l'étude de Briot et Bouquet, en donnant la forme des solutions dont ils avaient seulement démontré l'existence. Vers la même époque, en 1878, M. Poincaré arrivait, de son côté, à compléter le Mémoire de Briot et Bouquet sur les équations différentielles du premier ordre.

II. — Équations différentielles linéaires à une variable.

Les équations différentielles linéaires forment une classe dont l'étude est singulièrement simplifiée par le fait qu'on connaît la façon dont les constantes figurent dans l'intégrale générale. Un Mémoire, devenu classique, de M. Fuchs a été le point de départ des travaux extrêmement nombreux publiés sur les équations linéaires depuis une vingtaine d'années; le géomètre allemand s'est spécialement occupé du cas où les intégrales sont toutes régulières dans le voisinage des points singuliers.

En 1877, M. Hermite faisait connaître l'intégrale générale de l'équation de Lamé. On sait que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] y,$$

où $\operatorname{sn} x$ désigne la fonction elliptique ordinaire de module k, h une constante quelconque et n un entier. M. Hermite montrait qu'un système fondamental d'intégrales de cette équation est formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce, c'est-à-dire de fonctions uniformes se reproduisant multipliées par des constantes, quand on ajoute successivement à la variable les deux périodes. Je me demandai si le résultat précédent était fortuit, où s'il y avait là un fait tenant à une circonstance générale. Je montrai d'abord (9) que des circonstances analogues se rencontrent pour toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques, pourvu que son intégrale générale soit uniforme. J'ai établi, en effet, qu'une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques et dont l'intégrale est uniforme admet, en général, pour intégrale une somme de deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Certains cas exceptionnels peuvent se présenter; mais, dans tous les cas, l'intégrale générale peut être obtenue au moyen des fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques.

J'ai montré bientôt après (10 et 11) que le théorème établi pour les équations linéaires du second ordre s'étend aux équations de tous les ordres. Le théorème fondamental est le suivant : *une équation linéaire, à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme admet toujours pour intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce*. Ce théorème établi, on peut passer sans peine à la recherche de la forme des autres intégrales de l'équation. Si l'équation est d'ordre m, il arrive, *en général*, que l'équation admet, comme intégrales distinctes, m fonctions doublement périodiques de seconde espèce ; dans tous les cas, l'intégrale générale peut être exprimée à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous sommes donc ainsi conduit à une classe étendue d'équations linéaires dont l'intégrale générale peut être obtenue au moyen de fonctions déjà connues, et qui sont, outre les polynômes, la fonction exponentielle et la transcendante Θ de Jacobi. D'ailleurs, une équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques étant donnée, on sait reconnaître si son intégrale générale est uniforme. On pourra ainsi toujours décider si une équation rentre dans la classe dont j'ai fait l'étude. Dans le troisième Volume de son beau *Traité d'Analyse,* M. Camille Jordan m'a fait l'honneur de développer la théorie des équations précédentes ; qu'il me soit aussi permis de rappeler que mes recherches ont été le point de départ de M. Halphen dans son Mémoire couronné *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables.*

Comme exemple d'équations rentrant dans le type précédent, j'ai étudié une équation du second ordre rencontrée par M. Gyldén dans un problème de Mécanique céleste (8) ; je tiens à citer aussi l'équation suivante, qui a offert le premier exemple d'une équation *d'ordre supérieur au second, intégrée au moyen des fonctions elliptiques*

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + (h - 6k^2 \operatorname{sn}^2 x)\frac{dy}{dx} + h_1 y = 0,$$

où h et h_1 sont deux constantes quelconques. Il y a trois intégrales de la forme

$$\frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x},$$

λ et ω étant des constantes convenablement choisies, qui se trouvent déterminées de la manière suivante. D'abord λ se présente sous la forme d'une fonction doublement périodique de ω ; quant aux trois valeurs de ω, ce sont les trois racines distinctes de l'équation en ω

$$h_1 + 8h_1 k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega + \mathrm{M}\operatorname{sn}^2\omega + \mathrm{N} = 0,$$

M et N représentant des polynômes en h.

Dans la seconde Partie du Mémoire (11), nous nous occupons des systèmes d'équations linéaires simultanées à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. J'étudie, en particulier, le système suivant

$$\frac{du}{dt} = -\mathrm{A}v + \mathrm{B}w, \qquad \frac{dv}{dt} = \mathrm{A}u - \mathrm{C}w, \qquad \frac{dw}{dt} = -\mathrm{B}u + \mathrm{C}v,$$

qui jouit de la propriété de coïncider avec son système adjoint, tel qu'il a été défini par M. Darboux; A, B, C sont des fonctions doublement périodiques de t aux périodes $2K$ et $2iK'$, et l'on suppose les intégrales uniformes. Une circonstance remarquable se présente ici; il y a *toujours* dans ce cas un système d'intégrales formées de fonctions doublement périodiques de *première* espèce, les périodes pouvant être, dans certains cas, $4K$ et $4iK'$ au lieu de $2K$ et $2iK'$.

Parmi les systèmes de la forme précédente, celui où $\mathrm{A} = -\frac{1}{\mathrm{R}}$, $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = \frac{1}{r}$ offre un certain intérêt pour la Géométrie des courbes gauches; R et r peuvent être considérés comme désignant les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche, que nous supposons exprimés en fonction de $s = t$ de la courbe. Supposons que R et r soient des fonctions doublement périodiques de s aux périodes $2K$ et $2iK'$, et que le système ait ses intégrales uniformes; la proposition générale énoncée plus haut fait connaître une propriété de ces courbes : il existe une direction telle que la tangente, la normale principale et la binormale pour tous les points de la courbe situés à une distance les uns des autres égale à $2K$ (exceptionnellement à $4K$), font avec elle des angles respectivement égaux. Un cas particulier très simple (12) correspond à

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{2n}{a}\,\mathrm{dn}\left(\frac{s}{a}\right), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

a et b étant deux constantes et n un entier positif.

Avant de quitter les équations linéaires à coefficients doublement périodiques, je signalerai encore une classe d'équations linéaires du second ordre (18).

M. Klein avait donné une méthode très remarquable pour étudier les équations linéaires du second ordre, à coefficients rationnels, dont l'intégrale générale est algébrique. Les considérations dont s'était servi cet éminent géomètre peuvent être étendues à la classe suivante d'équations linéaires : je veux parler des équations linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques, pour lesquelles toute intégrale satisfait à une équation algébrique, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan. Je montre que les transcendantes uniformes, qui s'introduisent dans cette étude, peuvent toujours s'exprimer à l'aide de transcendantes classiques dans la théorie des fonctions elliptiques.

On a étudié principalement jusqu'ici la forme des intégrales d'une équation différentielle linéaire, dans le cas où les coefficients sont uniformes et où les intégrales sont, d'après l'expression de M. Fuchs, régulières. Toutefois, pour les intégrales irrégulières, on doit à M. Thomé des résultats importants, et, récemment, M. Poincaré a donné à ce sujet des théorèmes du plus haut intérêt. Je me suis occupé (29) d'une classe d'équations linéaires où les coefficients ne sont pas uniformes; considérons l'équation

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\,\mathrm{F}(x,y)\frac{du}{dx}+\mathrm{F}_1(x,y)u=0;$$

F et F_1 sont des fonctions des deux variables x et y, uniformes et continues pour toute valeur de x située dans un certain domaine autour de l'origine, le domaine de y s'étendant au plan tout entier; on pose $y=x^\mu$, μ étant une constante quelconque, et c'est la forme des intégrales d'une telle équation dans le voisinage de l'origine, que je me suis proposé d'étudier. J'y réussis complètement, *pourvu que μ ne soit pas réel et négatif;* la méthode employée est analogue à celle dont j'ai parlé plus haut : elle consiste encore à remplacer l'équation unique à étudier par un système d'équations aux dérivées partielles. Je dois avouer toutefois que j'ai été un peu déçu dans cette recherche; le cas où μ est un entier négatif serait pratiquement le plus intéressant, mais il échappe à la méthode. Si l'on considère, pour une valeur fixe de x, u comme fonction de μ, elle aura comme ligne de points singuliers essentiels la partie négative de l'axe réel.

Mes recherches sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes ayant nécessité la connaissance du *groupe* de certaines équations différentielles linéaires, j'ai dû chercher le groupe de ces équations linéaires d'ordre quelconque, équations qui peuvent être considérées comme des généralisations de l'équation hypergéométrique de Gauss, et qui ont été principalement étudiées par M. Hermite et Pochammer. On trouve les substitutions fondamentales du groupe sous une forme très simple, où ne figurent d'autres transcendantes que des exponentielles (59).

Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été souvent signalées et poursuivies dans des directions différentes; j'ai cherché à les étendre encore, en développant autant que possible, pour les équations linéaires, une théorie analogue à celle qui a été donnée par Galois pour les équations algébriques. Mais je parlerai de ce travail dans la section de cette Notice consacrée aux transformations.

III. — Équations différentielles non linéaires.

Équations du premier ordre. — Si, grâce aux nombreux travaux effectués depuis une vingtaine d'années, et particulièrement ceux de M. Fuchs et de M. Poincaré, la théorie des équations différentielles linéaires a réalisé des progrès d'une importance capitale, il s'en faut de beaucoup qu'il en soit de même pour les équations qui ne sont pas linéaires. Nous avons parlé plus haut des recherches que nous avons faites pour étendre et compléter les travaux classiques de Briot et Bouquet, relatifs à la discussion des intégrales dans le voisinage de certains points singuliers. Il faudrait pouvoir suivre l'intégrale pour toute valeur de la variable indépendante, mais c'est une étude extrêmement difficile, les points critiques étant généralement mobiles, c'est-à-dire variant avec l'intégrale que l'on considère. Une classe d'équations appelant tout d'abord l'attention est celle pour laquelle l'intégrale générale est uniforme. Briot et Bouquet ont étudié à fond le cas très simple où l'équation se réduit à

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

f étant un polynôme. De la forme donnée par Briot et Bouquet pour l'intégrale supposée uniforme d'une telle équation, on peut conclure, comme M. Hermite en a fait le premier la remarque, que le genre de la relation algébrique précédente est zéro ou un. Il m'a paru intéressant de chercher une démonstration *a priori* de ce résultat: c'est ainsi que je fus conduit à un théorème bien plus général, dont nous aurons bientôt à parler (41); mais, en continuant à regarder l'équation précédente comme une équation différentielle, je trouvai une autre démonstration *a priori*, qui fut le point de départ de mes recherches sur les équations du second ordre. Comme je ne l'ai pas publié, j'en donnerai ici le principe : désignons par Y et Y′ ce que deviennent y et sa dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ quand on remplace x par $x + h$, h étant une constante quelconque. En raisonnant toujours dans l'hypothèse où l'intégrale est uniforme, il est manifeste qu'à une valeur de y et y' ne correspond qu'une valeur de Y et Y′, et inversement. Nous pouvons donc dire que la courbe $f(y, y') = 0$ admet une transformation biuniforme en elle-même : mais nous verrons plus loin qu'une telle transformation doit être nécessairement birationnelle. La courbe précédente admet donc une transformation birationnelle en elle-même ; de plus, elle renferme le paramètre arbitraire h. Nous en concluons, en invoquant un théorème bien connu dans la théorie des courbes algébriques, que le genre de f ne peut être que zéro ou l'unité.

Avant de passer aux équations du second ordre, considérons encore l'équation (1). Après le cas de l'intégrale uniforme, on peut se proposer d'étudier les équations de ce type dont l'intégrale est racine d'une équation algébrique à coefficients uniformes; comme l'ont montré Briot et Bouquet, ces coefficients uniformes ne pourront être que des fonctions doublement périodiques (ou dégénérescences). Posé dans toute sa généralité, le problème de reconnaître si l'intégrale d'une équation donnée $f(y, y') = 0$ est racine d'une équation algébrique à coefficients uniformes est resté sans solution, malgré les efforts de bien des géomètres.

Le problème précédent revient, en réalité, à reconnaître si une intégrale abélienne est réductible aux intégrales elliptiques. C'est une question dont je m'occupais dès 1881 (23).

Étant donnée une relation algébrique $f(x, y) = 0$ de genre p, soit $\int R(x, y)\,dx$ une intégrale abélienne de première espèce correspondante; il peut arriver que cette intégrale n'ait que deux périodes. S'il en est ainsi, l'équation

$$R(x_1, y_1)\,dx_1 + R(x_2, y_2)\,dx_2 = 0$$

aura son intégrale générale algébrique, et la réciproque de cette proposition est exacte, c'est-à-dire que, si cette équation a son intégrale générale algébrique, l'intégrale abélienne n'aura pas plus de deux périodes. D'une manière plus générale (39), supposons que, parmi les p intégrales abéliennes relatives à la courbe f, il y en ait q $(q < p)$ ayant seulement $2q$ périodes simultanées. Soient $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_q(x)$ ces q intégrales : j'établis le théorème suivant. Considérons les équations

$$\sum_{i=1}^{i=q} u_1(x_i) = z_1, \qquad \sum_{i=1}^{i=q} u_2(x_i) = z_2, \qquad \dots, \qquad \sum_{i=1}^{i=q} u_q(x_i) = z_q.$$

On sait que, dans le cas d'un système abélien, c'est-à-dire quand $q = p$, toute fonction symétrique $x_1, x_2, \dots, x_q$ est une fonction uniforme (abélienne) de $z_1, z_2, \dots, z_p$. Il n'en est plus nécessairement ainsi quand q est différent de p; mais $x_1, x_2, \dots, x_q$ sont néanmoins encore racines d'équations algébriques dont les coefficients sont fonctions uniformes de $z_1, z_2, \dots, z_q$ avec $2q$ systèmes de périodes; de plus, *ces fonctions $2q$ fois périodiques pourront s'exprimer à l'aide des fonctions Θ de q variables indépendantes.*

Je me suis particulièrement occupé du cas où $p = 2$, la relation entre x et y pouvant être mise alors sous la forme

$$y^2 = x(1-x)(1-kx)(1-lx)(1-mx). \tag{2}$$

Je pose la question de la manière suivante : Trouver les expressions générales de k, l, m, telles qu'il existe une intégrale de première espèce correspondant à la relation précédente et ayant seulement deux périodes. La réponse est donnée par la proposition qui suit :

S'il existe une intégrale de première espèce, correspondant à la relation précédente et ayant seulement deux périodes, on pourra trouver un système d'intégrales normales dont le tableau des périodes sera

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & G & \frac{1}{D} \\ 1 & 0 & \frac{1}{D} & G \end{array}$$

où D *désigne un entier réel et positif.*

Ce théorème fait connaître immédiatement les expressions générales de k, l, m; on n'a en effet qu'à substituer $H = \frac{1}{D}$ dans les valeurs de k, l, m données par les formules de Richelot, où figurent les fonctions Θ à deux variables pour les valeurs zéro des arguments. Pour une valeur donnée à l'entier D, k, l et m sont des fonctions uniformes de G et G′ qui sont des constantes arbitraires; elles sont intéressantes, car ce sont des fonctions fuchsiennes, et l'on tire de cette remarque, entre autres résultats, le théorème suivant : *A chaque valeur de l'entier* D *correspond une relation algébrique entre k, l et m.*

On voit que, dans la question proposée, il y a un nombre entier D jouant un rôle essentiel. Ce nombre peut être défini d'un mot : c'est le degré de la transformation rationnelle transformant l'intégrale hyperelliptique en une intégrale elliptique. Notons que le cas particulier $D = 2$ correspond à un cas traité, il y a longtemps, par Jacobi, celui où $m = kl$.

Il faudrait parler maintenant du problème inverse, c'est-à-dire montrer comment, la relation (2) étant donnée, on pourra reconnaître s'il y a une intégrale correspondante n'ayant que deux périodes. Malheureusement mes efforts ont échoué devant cette question extrêmement difficile; certainement la question devient facile si l'on se donne le degré D de la transformation, ou, ce qui revient au même, en revenant au problème initial, le degré de l'équation algébrique à laquelle satisfait l'intégrale; mais on n'a pu réussir jusqu'ici à fixer une limite supérieure de ce degré. Nombreux sont d'ailleurs, en Analyse, les problèmes de ce genre où un certain nombre entier, inconnu *a priori*, joue le rôle essentiel. Pour en revenir au Mémoire qui nous occupe en ce moment, citons le théorème suivant :

Si une intégrale abélienne de première espèce, relative à la relation $y^2 = R(x)$ [$R(x)$ *désignant un polynôme du cinquième degré*], *a seulement deux périodes, il y aura nécessairement une seconde intégrale jouissant de la même propriété.*

On peut ajouter à l'énoncé précédent qu'il y aura, *en général*, seulement deux intégrales ne possédant que deux périodes. Dans certains cas particuliers cependant, *il peut arriver qu'il y ait une infinité d'intégrales ayant seulement deux périodes* (24).

J'ai donné deux exemples de cette circonstance singulière : l'un est relatif à la courbe du second genre

$$y^3 = x(x-1)(x-a)^2$$

(a désignant une constante quelconque), pour laquelle l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{(1-m\lambda)(x-a)+(1-m\lambda^2)y}{y^2}\,dx,$$

où λ désigne une racine cubique imaginaire de l'unité et m représente une quantité *réelle commensurable* quelconque, a seulement deux périodes; l'autre exemple est relatif à la courbe du troisième genre

$$y^2 = x^8 + ax^4 + b,$$

qui possède aussi une infinité d'intégrales de première espèce avec deux périodes; en effet, l'intégrale

$$\int \frac{(m+i)\sqrt[4]{b}-(m-i)x^2}{\sqrt{x^8+ax^4+b}}\,dx$$

n'a que deux périodes si m est une quantité réelle commensurable.

Dans une Lettre à M^me de Kowalewsky, qui n'a pas été publiée, M. Weierstrass s'était aussi occupé de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Dans un Mémoire sur ce sujet, paru après la publication de mon travail, M^me de Kowalewsky fait mention des recherches de

M. Weierstrass. L'illustre géomètre de Berlin traite du cas général de la réduction des intégrales de genre quelconque aux intégrales elliptiques, tandis que je me suis occupé spécialement des intégrales de genre deux, mais il pousse la réduction moins loin. Ainsi, pour le Tableau des périodes que j'ai donné plus haut, le théorème de M. Weierstrass indique seulement un nombre commensurable quelconque, au lieu de la fraction $\frac{1}{D}$ (50) : la différence est importante, car, au point de vue où je me suis placé, cet entier D joue un rôle essentiel. C'est pour moi aussi une satisfaction de penser que mes recherches sur ce sujet ont attiré l'attention de M. Poincaré, qui a étendu les travaux de M. Weierstrass et les miens.

La lecture d'un Mémoire de M. Darboux a appelé mon attention sur un tout autre Chapitre de la théorie des équations différentielles du premier ordre. Dans son Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre et du *premier degré*, M. Darboux a fait connaitre un théorème extrêmement remarquable, d'après lequel on peut former l'intégrale générale de ces équations, quand on en connait un nombre suffisant de solutions particulières algébriques. La méthode employée par l'éminent géomètre peut, sous certaines conditions, être étendue aux équations du premier ordre de *degré quelconque* (58). Cette extension se rattache à diverses questions concernant la théorie des surfaces et des courbes gauches algébriques; je me suis borné au cas où chaque solution représente l'intersection *complète* de deux surfaces. Il y aurait intérêt, je crois, à approfondir davantage la question.

La théorie des fonctions hyperfuchsiennes m'a encore conduit à une classe étendue et intéressante d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégration peut être obtenue à l'aide de ces transcendantes; mais ces applications seront mieux à leur place dans l'exposé de mes travaux sur les fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.

Équations d'ordre supérieur. — J'ai étudié tout d'abord (21) une classe d'équations analogue à celle de Briot et Bouquet : ce sont les équations du second ordre de la forme

$$f\left(y, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0,$$

où f est un polynôme, et je me suis proposé de rechercher dans quels cas elle admettra des intégrales uniformes. L'étude de ce problème peut être poussée jusqu'au bout; je commence par démontrer un théorème analogue à celui dont nous parlions plus haut pour le problème de Briot et Bouquet : *Le genre de la relation précédente doit être zéro ou l'unité.* Nous examinons successivement ces deux hypothèses; c'est dans le cas où le genre est égal à zéro que la discussion demande le plus de soins. Trois cas peuvent se présenter : ou toutes les intégrales de l'équation sont uniformes, ou bien une seule série d'intégrales est uniforme, celles-ci se déduisant les unes des autres par l'addition d'une constante à la variable x, ou bien enfin il n'y a pas d'intégrale uniforme. Toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle de x et de e^{ax}, a désignant une constante. L'examen du cas où le genre est égal à l'unité est beaucoup plus facile. Toutes les intégrales de l'équation proposée ne sont pas, dans ce cas, uniformes; il ne peut y avoir que celles que l'on déduirait d'une première intégrale uniforme par le changement de x en x plus une constante : cette intégrale est doublement périodique. En résumé, l'équation ne peut admettre d'autres intégrales uniformes que des fonctions rationnelles de x et de e^{ax}, et des fonctions doublement périodiques. Nous montrons comment on peut reconnaitre s'il en est ainsi et trouver en même temps ces intégrales uniformes.

Considérons maintenant l'équation plus générale

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \tag{2}$$

f étant un polynôme. Il est bien élémentaire qu'une réduction facile transforme cette équation en une équation du premier ordre; mais nous voulons garder l'équation sous cette forme et étudier le cas où l'intégrale générale de cette équation est une fonction uniforme de x. Dans le cas précédent où le terme en $\frac{dy}{dx}$ manquait dans l'équation, les propriétés de la *courbe algébrique* représentée par la relation entre y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ jouaient un rôle essentiel. On pressent ici qu'il y aura une dépendance entre l'équation différentielle que nous venons d'écrire et les propriétés de la *surface algébrique* qu'on peut regarder comme représentée par cette relation. Aussi l'étude actuelle est-elle intimement liée à mes recherches sur les surfaces algébriques; nous allons donc, pour le moment, nous borner aux généralités, et nous reviendrons sur ce sujet dans le Chapitre réservé aux fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

Pour l'équation de Briot et Bouquet entre y et $\frac{dy}{dx}$, j'ai donné plus haut, avec quelques détails, un raisonnement qui permet d'établir, *a priori*, que le genre de la courbe ne peut pas dépasser l'unité. Peut-on étendre ce raisonnement à l'équation actuelle? Supposons que l'intégrale de l'équation précédente soit une fonction uniforme de x avec le seul point ∞ comme point singulier essentiel. Désignons par Y, Y′ et Y″ ce que deviennent y, sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y'', quand on remplace x par $x+h$, h désignant une constante quelconque. A tout système de valeurs de y, y' et y'' ne correspond qu'un système de valeurs de Y, Y′ et Y″, et inversement : nous pouvons donc dire que la *surface algébrique*

$$f(y, y', y'') = 0, \tag{3}$$

admet une transformation biuniforme en elle-même, dépendant d'un paramètre arbitraire h. Mais c'est ici que va apparaître la différence profonde entre l'équation de Briot et Bouquet et celle que nous étudions maintenant; et nous allons avoir la véritable raison de cette différence : *elle est tout entière dans ce fait que, pour une courbe, une transformation biuniforme est toujours birationnelle, tandis qu'il en est autrement pour une surface.* C'est là un point, à mon avis, capital, et il permet de partager la question en deux parties bien distinctes, suivant que la transformation précédente est ou non birationnelle (71).

En supposant la transformation birationnelle, voici le résultat auquel on arrive relativement à la nature de l'intégrale générale : *celle-ci est une fonction doublement périodique (ou dégénérescence d'une telle fonction), ou bien les coordonnées y, y', y'' d'un point quelconque de la surface (3) s'exprimeront en fonctions uniformes quadruplement périodiques (ou dégénérescences de telles fonctions) de deux paramètres u et v, et l'intégrale générale s'obtiendra en faisant, dans l'expression de y,*

$$u = ax + \alpha, \qquad v = bx + \beta,$$

α et β étant deux constantes arbitraires, et a et b deux constantes convenables.

Nous parlerons plus loin du problème de reconnaître sur l'équation différentielle elle-même si celle-ci a une intégrale générale uniforme avec une substitution correspondante birationnelle; c'est un point qui est lié à la théorie des surfaces algébriques.

Si maintenant, sans nous préoccuper de la transformation biuniforme dont il vient d'être parlé, nous partons directement de l'équation proposée, pouvons-nous reconnaître sur celle-ci si son intégrale générale est uniforme? La chose semble facile au premier abord : on ramène d'abord l'équation à une équation du premier ordre, en posant $\frac{dy}{dx} = p$ et considérant p comme fonction de y. On peut appliquer à cette équation les principes développés par Briot et Bouquet dans leur Mémoire classique; pour éliminer une première série de difficultés, supposons même que, dans l'étude des singularités de cette équation, on puisse toujours se trouver ramené au cas, à la fois général et simple, spécialement étudié par ces géomètres et qu'on peut appeler une *singularité régulière*, en employant la terminologie de la théorie des équations linéaires. Quand l'équation du premier ordre aura été complètement discutée, on aura à revenir à l'équation initiale, c'est-à-dire poser

$$\frac{dy}{dx} = p(y).$$

La grande difficulté est de reconnaître si y ainsi définie est une fonction uniforme de x. Il est facile de reconnaître si, dans le voisinage de chaque valeur *effectivement* atteinte par la variable x, la fonction y est uniforme; mais cela ne fait pas nécessairement, quand il en est ainsi, que la fonction y soit réellement une fonction uniforme. Il peut, par exemple, y avoir des trous dans la portion du plan (simple ou multiple) décrite par la variable x; quand celle-ci revient au point de départ, après avoir contourné une lacune, la fonction y peut ne pas reprendre la même valeur. Il y a là une difficulté considérable qu'il paraît bien difficile de lever, mais qu'il était important de mettre en évidence. Nous disons alors que la fonction y est *à apparence uniforme*.

Les conditions pour que l'intégrale générale d'une équation soit à apparence uniforme consistent en relations, *de nature algébrique*, entre les coefficients de l'équation; au contraire, les conditions exprimant que l'intégrale est une fonction uniforme *se traduiront en général par des relations transcendantes entre les coefficients de l'équation différentielle*. A prendre d'ailleurs la question dans toute sa généralité, les circonstances les plus diverses peuvent se présenter: ainsi l'intégrale générale peut être une fonction uniforme à espace lacunaire; mais le domaine dans lequel est déterminée la fonction peut être variable avec l'intégrale que l'on considère. Nous avons donné des exemples de cette circonstance remarquable.

Nous avons spécialement considéré le cas où l'équation a la forme $y'' = R(y, y')$, R étant rationnelle en y et y'. Il nous a paru curieux de montrer que y pouvait se mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions à apparence uniforme, *n'ayant pas de pôles;* on a ainsi une sorte de généralisation des fonctions Al ou des fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques, qui peuvent, comme on sait, se tirer *directement* de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' = ay^3 + by^2 + cy + d.$$

Dans les équations qui précèdent, la variable indépendante ne figure pas explicitement. Prenons maintenant l'équation plus générale

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

où f est un polynôme en y, y' et y''. Un problème avait été traité pour les équations du premier ordre, que l'on devait songer naturellement à étudier pour les équations d'ordre supérieur. Ce problème est celui dont un éminent géomètre, que nous avons eu déjà l'occasion de citer, M. Fuchs, a commencé l'étude, et sur lequel M. Poincaré a donné de si remarquables résultats; il est relatif à la classe d'équations différentielles dans lesquelles les points *critiques* sont *fixes*, c'est-à-dire indépendants des constantes arbitraires figurant dans l'intégrale générale. On sait qu'en général il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que, pour une équation prise arbitrairement, les points critiques varient d'une intégrale à l'autre; la condition indiquée délimite donc une classe d'équations, et celle-ci a été étudiée, pour le premier ordre, par M. Fuchs d'abord, et ensuite par M. Poincaré qui a porté cette théorie au plus haut point de perfection.

J'ai donc tenté cette étude pour l'équation du second ordre ci-dessus écrite. Il semble au premier abord que l'extension des raisonnements faits pour une équation du premier ordre va être facile; il n'en est rien. On peut bien commencer à suivre les modes de raisonnement employés par M. Poincaré; la fin du raisonnement n'est malheureusement plus applicable. Nous nous trouvons toujours en présence du même fait; une certaine transformation biuniforme n'est pas nécessairement birationnelle, et c'est ce qui vient changer du tout au tout le caractère de cette théorie. J'ai dû ici, comme plus haut, circonscrire la question au cas où la transformation est birationnelle; j'en reparlerai plus loin.

IV. — Équations aux dérivées partielles.

Dans la théorie des fonctions d'une variable, il y a de nombreux exemples où la fonction se trouve presque complètement définie, par la nature de ses singularités. Un exemple qui restera classique se trouve dans les œuvres de Riemann. Dans quelques pages très remarquables, surtout si l'on se reporte à l'époque où elles ont été écrites (*Beiträge zur Theorie der durch Gauss'che Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen*), le grand géomètre traite à un point de vue tout nouveau la série hypergéométrique; Riemann définit les fonctions hypergéométriques par leurs trois points critiques et les exposants relatifs à ces points, exposants entre lesquels est assignée une relation convenable. Le problème de Riemann peut-il être étendu aux fonctions de deux variables indépendantes? Telle est la question à laquelle je réponds complètement (20); je me suis proposé de montrer que certaines fonctions de deux variables indépendantes peuvent être déterminées par leurs points critiques et les exposants correspondants; mais ici les points singuliers ne sont plus en nombre limité, et il y aura une infinité de valeurs des variables x et y, qui seront pour la fonction des positions singulières.

Je pose le problème comme il suit : Soit $F(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes illimitées x et y jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord il existe entre quatre déterminations de la fonction une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage de toute valeur α de x, et β de y ne coïncidant pas avec une des valeurs 0, 1 et ∞, et de plus différentes entre elles, la fonction est holomorphe par rapport à x et à y; α étant une valeur quelconque différente de 0, 1 et ∞, trois des branches de la fonction ont, dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$, les formes suivantes linéairement indépendantes

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{\lambda+b_1-1} P_3(x, y),$$

λ et b_1 étant deux constantes, et les P étant des fonctions holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$. Pareillement dans le voisinage de $x = 1$, y ayant une valeur différente de 0, 1 et ∞, on aura trois déterminations analogues, en remplaçant seulement dans la troisième expression x par $x - 1$ et substituant une nouvelle constante b_2 à b_1. Enfin, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a trois déterminations

$$x'^{-\lambda+1} R_1(x', y), \quad x'^{-\lambda+1} R_2(x', y), \quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)} R_3(x', y),$$

R_1, R_2 et R_3 étant holomorphes dans le voisinage de $x' = 0$, $y = \alpha$.

Nous aurons de même des déterminations analogues, quand, faisant varier x dans le voisinage d'une valeur distincte de 0, 1 et ∞, on donne à y des valeurs voisines de ces dernières, les divers exposants étant représentés par les mêmes lettres accentuées, et nous posons de suite $b'_1 = b_1$, $b'_2 = b_2$, $b'_3 = \lambda$, $\lambda' = b_3$.

Enfin, pour $x = y = \alpha$, on a les déterminations linéairement indépendantes

$$A_1(x, y), \quad A_2(x, y), \quad (x - y)^{\lambda+b_3-1} A_3(x, y).$$

Nous établissons que *la fonction* $F(x, y)$ *est déterminée par les conditions précédentes :* je veux dire que, $F(x, y)$ étant une première fonction satisfaisant à ces conditions, toute autre fonction jouissant des mêmes propriétés s'exprimera linéairement au moyen de trois déterminations de F linéairement indépendantes. La fonction dont nous venons d'établir l'existence peut être mise sous forme d'intégrale définie; considérons, en effet, les intégrales

$$\int_{g}^{h} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

g et h désignant deux des cinq quantités 0, 1, y, x et ∞; ces intégrales ne sont que diverses déterminations de notre fonction multiforme $F(x, y)$.

Si l'on fait dans l'intégrale précédente $g = 1$, $h = \infty$, on obtient une expression holomorphe par rapport à x et à y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x = 0$, $y = 0$ et un rayon égal à l'unité : on peut la développer en série procédant suivant les puissances croissantes de x et y. Je retrouve ainsi la série remarquable découverte auparavant par M. Appell et donnée par lui comme extension au cas de deux variables de la série hypergéométrique de Gauss; M. Appell avait représenté la série précédente par une intégrale double.

La fonction F satisfait à un système de trois équations linéaires simultanées du second ordre, et c'est même à ce système que j'arrive d'abord. Ces équations simultanées admettent trois solutions communes linéairement indépendantes; M. Appell les avait aussi obtenues. Les résultats précédents s'étendent d'ailleurs d'eux-mêmes à un nombre quelconque de variables; on peut ainsi obtenir des séries hypergéométriques d'un nombre quelconque de variables.

Le problème de Riemann, dont je donnai, le premier, dans ce qui précède, une extension au cas de deux variables, a depuis fait l'objet de divers travaux, parmi lesquels je dois citer les belles recherches de M. Goursat.

Avant de quitter les systèmes d'équations linéaires, je signalerai une Note que j'ai publiée en commun avec M. Appell (26), et dans laquelle on montre que le théorème établi pour les équations linéaires à coefficients doublement périodiques peut être étendu à certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles, dont les coefficients sont des fonctions de p variables à $2p$ groupes de périodes conjuguées.

Un autre sujet de recherches sur les équations aux dérivées partielles m'a été fourni par une équation du premier ordre. Il ne semble pas qu'il y ait aujourd'hui dans ce domaine si labouré grand sujet d'études; leur intégration est considérée comme un fait acquis à la Science, parce qu'on sait la ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. En fait, ce second problème étant loin d'être résolu, il y a grand intérêt à étudier des classes d'équations aux dérivées partielles, dont quelque solution puisse s'exprimer à l'aide de transcendantes connues. C'est ce que j'ai essayé de faire; nous avons déjà eu plusieurs fois à citer le Mémoire de Briot et Bouquet sur l'intégration des équations ordinaires à l'aide des fonctions doublement périodiques. Une question analogue peut se poser pour les équations aux dérivées partielles de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

où f est, bien entendu, un polynôme : je veux parler du cas où cette équation admettrait comme intégrales des fonctions uniformes quadruplement périodiques de x et y (34) et (64). Nous commençons par établir le théorème suivant qui est fondamental pour notre étude, et dont la démonstration exige quelques soins : u étant une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y, soit $f(u, v, w) = 0$ la relation algébrique existant entre u et ses dérivées partielles $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial u}{\partial y}$. A un point *arbitraire* de la surface f ne correspond *qu'un seul* système de valeurs de x et y, abstraction faite, bien entendu, de multiples de périodes. Je montre ensuite comment on peut, de la seule équation différentielle donnée, *déduire un système de deux équations aux différentielles totales*, donnant la solution quand elle existe. Ces deux équations aux différentielles totales sont de la forme

$$dx = P\,(u, v, w)\,du + R\,(u, v, w)\,dv,$$

$$dy = P_1(u, v, w)\,du + R_1(u, v, w)\,dv,$$

où les P et R sont des fonctions rationnelles de u, v et w, celles-ci étant liées par la relation $f = 0$. Il n'y a plus alors qu'à discuter ce système; c'est un point dont nous avons fait une étude approfondie et sur lequel nous reviendrons.

Passons maintenant aux équations aux dérivées partielles du second ordre; je me suis uniquement occupé jusqu'ici des équations linéaires. Signalons d'abord une étude dont un extrait seulement a été publié (81). On connaît la transformation célèbre qui porte le nom de Laplace, et par laquelle le grand géomètre intègre les équations linéaires ordinaires pour lesquelles les coefficients sont des fonctions linéaires de la variable indépendante; la transformation de Laplace s'étend d'elle-même aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, pour lesquelles les coefficients sont des fonctions linéaires des deux variables indépendantes. On a alors à intégrer une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du premier degré dont l'intégration, impossible en général, peut cependant être effectuée dans des cas étendus. C'est sous forme d'intégrale double que se présentent dans cette question les intégrales de l'équation, et ici un point fort important est à signaler. Il est très avantageux, pour tirer tout le parti possible de la méthode, de ne pas se borner à la signification usuelle de l'intégrale double, mais de prendre une telle intégrale avec le sens plus général que lui a donné M. Poincaré en considérant les deux variables comme des variables complexes, et en choisissant convenablement le *continuum* d'intégration. Nombreux sont les types d'équations qui se trouvent ainsi intégrées; citons, entre autres, l'équation suivante

$$\text{(E)} \qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

dans laquelle A, B, C représentent des constantes, tandis que D, E, F sont des fonctions linéaires quelconques de x et y.

Un des points les plus importants de la théorie des équations aux dérivées partielles est la détermination des intégrales par des conditions aux limites. Si l'on considère une équation linéaire du second ordre, comme celle qui est écrite plus haut, mais où les coefficients sont des fonctions quelconques de x et de y, il résulte du théorème général de Cauchy sur l'existence des intégrales qu'une surface intégrale est en général déterminée quand on l'assujettit à passer par une courbe donnée et à avoir en tous les points de cette courbe des plans tangents donnés. Les idées essentielles pour la solution du problème sous cette forme ont été indiquées par Riemann, et elles viennent d'être magistralement développées par M. Darboux dans ses belles *Leçons sur la théorie des surfaces*. Mais on peut se placer à un tout autre point de vue; l'équation classique de la théorie de la chaleur et du potentiel

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

a montré depuis longtemps qu'une intégrale d'une équation linéaire aux dérivés partielles du second ordre peut se trouver déterminée, quand on donne la succession de ses valeurs sur le bord d'un contour fermé, pourvu qu'elle soit continue, ainsi que ses dérivées à l'intérieur de ce contour. Ce genre de déterminations peut-il s'étendre à une équation linéaire quelconque du second ordre, telle que l'équation (E), les coefficients étant des fonctions quelconques de x et de y? Il y a ici une première distinction à faire suivant le signe de

$$B^2 - AC$$

dans la région du plan (x, y) que l'on étudie. Si cette expression n'est pas constamment négative dans cette région, il y aura en général une infinité d'intégrales satisfaisant aux conditions indiquées; il pourra même en être encore ainsi dans une région où ce discriminant est négatif. Mais voici la proposition que l'on peut établir (83) :

Soit (x_0, y_0) un point pour lequel le discriminant est négatif; on peut délimiter autour de ce point un certain domaine tel que, C désignant une courbe fermée quelconque tracée dans ce domaine, il ne puisse exister deux intégrales, uniformes et continues dans l'aire limitée par C, et prenant sur cette courbe la même valeur.

La question, surtout intéressante, est la proposition réciproque, je veux dire la démonstration de l'existence et la détermination d'une intégrale donnée par ses valeurs sur un contour C. Nous y parvenons en nous servant d'une méthode d'approximations successives, qui me paraît assez importante pour que j'indique ici son principe. On ne diminue pas la généralité de la question en se bornant à l'equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu.$$

Partons donc de cette équation et mettons d'abord zéro dans le second membre; nous intégrerons l'équation restante $\Delta u = 0$, à l'aide de la condition aux limites : soit u_0 la fonction ainsi trouvée. Continuant notre approximation, nous mettrons u_0 dans le second membre à la place de u, et nous formerons une fonction u_1 satisfaisant à cette nouvelle équation et *s'annulant* sur le bord; nous procédons ainsi indéfiniment et obtenons de cette manière une suite indéfinie $u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *La série*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

donne la solution du problème proposé.

Le théorème général qui précède est relatif à une équation linéaire du second ordre quelconque. Il y a une classe d'équations linéaires se rapprochant plus spécialement de l'équation de Laplace, et pour lesquelles certaines facilités se présentent dans la solution du problème dont nous venons de parler (80) : ce sont les équations auxquelles on est conduit quand on égale à zéro la première variation d'une intégrale double dont l'élément est de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

f étant une forme quadratique homogène en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x et y, la variation de u sur le contour d'intégration étant supposée nulle; ces équations peuvent toujours se ramener par un changement de variables et de fonction à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y)\, u,$$

qui a fait l'objet de bien des recherches. Au point de vue qui nous occupe, il faut citer un remarquable Mémoire de M. Schwarz, qui a été le point de départ de notre travail (85). Nous montrons, en particulier, comment les belles méthodes employées par le géomètre de Göttingue dans l'étude de l'équation de Laplace peuvent, sous certaines conditions, être étendues à l'équation précédente; signalons l'extension du procédé alterné, qui joue encore ici un rôle important.

DEUXIÈME CHAPITRE.

ÉTUDE ALGÉBRIQUE ET ARITHMÉTIQUE DES TRANSFORMATIONS ET DES GROUPES.

La théorie des formes et des transformations apporte de précieux secours à la théorie des fonctions et des équations différentielles ; c'est ainsi que j'ai été conduit à m'occuper des recherches arithmétiques et algébriques qui suivent.

I. — Formes algébriques, groupes hyperfuchsiens et hyperabéliens.

L'étude arithmétique des formes algébriques forme un Chapitre capital de la théorie des nombres. Dès que je fus entré dans cette étude, je ne tardai pas à voir l'intérêt qu'elle pourrait présenter en donnant des exemples étendus de ces groupes discontinus sur lesquels les recherches de M. Poincaré venaient d'appeler si brillamment l'attention. A ce point de vue, les formes binaires réelles, telles que Gauss les étudie dans un Ouvrage célèbre, ne pouvaient pas me conduire au but. Il en est tout autrement des formes quadratiques binaires *à indéterminées conjuguées* dont M. Hermite avait, il y a longtemps, montré l'intérêt dans des questions d'un tout autre ordre, notamment dans l'extension aux quantités complexes de la théorie des fractions continues arithmétiques. Nous entendons par forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées une expression de la forme

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

où a et c sont des quantités réelles, b et b_0 deux quantités complexes conjuguées, x et y désignent deux indéterminées ayant respectivement pour conjuguées x_0 et y_0. Je me suis proposé (12) de faire l'étude arithmétique de cette forme, en supposant que les coefficients soient des nombres entiers (b étant un entier complexe de Gauss) et que la forme soit indéfinie

$$(bb_0 - ac > 0).$$

La méthode qui ramène l'étude arithmétique d'une forme réelle indéfinie à la réduction *continuelle* d'une forme définie dépendant de certains paramètres arbitraires peut s'étendre aux formes quadratiques à indéterminées conjuguées, et cette extension est le point de départ de mon étude sur les formes binaires indéfinies. La forme définie que nous sommes conduit à associer à la forme indéfinie donnée ne renferme qu'un paramètre (complexe) arbitraire z, et il suffit de donner à ce paramètre toutes les valeurs complexes de module inférieur à l'unité. *Les conditions de réduction de cette forme sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable*, à laquelle nous devons d'avoir pu effectuer sans peine la réduction continuelle : elles expriment que le point, dont l'affixe est z, doit être à l'intérieur d'un polygone limité par des arcs de cercles orthogonaux au cercle de rayon un.

En effectuant la réduction continuelle de la forme définie associée, on obtient, sur le plan où est représenté le paramètre complexe z, un réseau indéfini de polygones et ce réseau *ne recouvre qu'une seule fois* la surface du cercle de rayon un. On passe d'un polygone à un autre par une substitution linéaire de la forme

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right).$$

Ces substitutions forment un groupe fuchsien ; il est isomorphe au groupe des substitutions linéaires transformant la forme donnée en elle-même. Les considérations précédentes donnent alors les substitutions fondamentales de l'un et l'autre de ces groupes. J'ai développé entièrement les calculs pour la forme $f = xx_0 - 2yy_0$; il y a dans ce cas quatre substitutions fondamentales pour le groupe correspondant.

Après avoir montré comment on peut construire un polygone fondamental du groupe, il était intéressant de compléter l'étude de ses substitutions (82). Celles-ci sont, en général, *hyperboliques*, c'est-à-dire que, pour une forme prise arbitrairement, il n'y a pas de substitutions *elliptiques ;* quant aux substitutions *paraboliques*, la condition nécessaire et suffisante pour leur existence est que le discriminant de la forme soit une somme de deux carrés. Dans son beau Mémoire sur les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique, M. Poincaré a donné une généralisation bien remarquable des équations modulaires. En appliquant le même ordre d'idées aux fonctions fuchsiennes provenant d'une forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées, on est conduit sans aucune peine à une nouvelle généralisation de ces équations. Ce résultat peut être ainsi énoncé : soient f une forme quadratique binaire indéfinie et G le groupe fuchsien correspondant, formé par les substitutions à coefficients entiers transformant la forme en elle-même. Considérons, d'autre part, une substitution transformant f en elle-même, dont les coefficients ne soient pas des entiers, mais seulement des nombres commensurables (réels ou complexes); à cette substitution correspond une substitution de la forme

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant des entiers, mais le déterminant $ad - bc$ étant différent de l'unité. Ceci posé, si $\mathrm{F}(z)$ désigne une fonction fuchsienne de groupe G, *il y aura une relation algébrique entre* $\mathrm{F}(z)$ et $\mathrm{F}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$; ce sont là les équations algébriques qui comprennent visiblement comme cas particuliers les équations modulaires, celles-ci correspondant au cas où la forme f se réduit à $ixy_0 - ix_0y$.

Nous venons de parler de ces groupes dont l'étude générale a été faite par M. Poincaré et qui ont été appelés par lui *groupes fuchsiens*. Un tel groupe est formé de substitutions linéaires fractionnaires qui transforment toutes en lui-même un certain cercle fondamental; de plus, il est *discontinu*, c'est-à-dire qu'étant donnée une valeur arbitraire de z, toutes ses transformées par les substitutions du groupe en diffèrent d'une quantité finie. Le premier exemple d'un tel groupe avait été donné par la théorie des fonctions modulaires.

Après avoir lu le Mémoire de M. Poincaré sur les groupes fuchsiens, je me demandai immédiatement s'il existe des groupes *discontinus* contenus dans le groupe linéaire à deux variables, c'est-à-dire dans le groupe des substitutions relatives aux variables u et v de la forme

$$\left(u, v, \frac{a'u+b'v+c'}{au+bv+c}, \frac{a''u+b''v+c''}{au+bv+c}\right).$$

Un seul exemple d'un tel groupe, mais bien peu utile, s'offrait à l'esprit, celui du groupe à quatre périodes, formé de quatre substitutions de la forme $(u, v, u+\alpha, v+\beta)$. Aucun exemple analogue au groupe modulaire ne se présentait, et il n'y avait rien à demander sur ce point à la théorie des fonctions abéliennes, tout au moins sous sa forme classique. Par quoi, d'ailleurs, se trouverait remplacée ici la condition imposée aux substitutions du groupe fuchsien, de conserver un certain cercle? C'est alors que la pensée de recourir *aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées* vint me tirer d'embarras (44). Soit

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$$

une forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées; si l'on pose $\frac{x}{z} = u$, $\frac{y}{z} = v$, l'équation $f = 0$ représentera, dans l'espace à quatre dimensions correspondant aux deux variables complexes u et v, une certaine surface Σ à trois dimensions. Cette surface Σ joue le rôle du cercle de tout à l'heure, et j'appelai *groupe hyperfuchsien* tout groupe linéaire discontinu *transformant en elle-même la surface* Σ. Au point de vue algébrique, la forme f peut toujours être transformée, par une substitution linéaire, en la forme $\pm(xx_0 + yy_0 - zz_0)$ et, par suite, la surface Σ être ramenée à l'*hypersphère*, représentée par l'équation

$$uu_0 + vv_0 = 1.$$

Dans le cas des groupes fuchsiens, il n'y a pas, au point de vue du groupe, de distinction essentielle à faire entre l'intérieur et l'extérieur du cercle fondamental. Il s'en faut de beaucoup qu'il en soit de même dans le cas actuel; c'est seulement à l'intérieur de l'hypersphère que l'on pourra, en général, affirmer la discontinuité du groupe. Pareilles différences se rencontrent quand on veut distinguer en substitutions elliptiques et hyperboliques les substitutions précédentes. Celles-ci ont, en général, trois points doubles; dans le cas d'une substitution elliptique, un des points doubles est à l'intérieur de l'hypersphère et les deux autres à l'extérieur, et, dans le cas d'une substitution hyperbolique, deux des points doubles sont sur la surface de l'hypersphère et le troisième à l'extérieur.

Les considérations qui précèdent sont purement algébriques; nous n'avons indiqué jusqu'ici aucun exemple de groupe hyperfuchsien : rien même ne prouve l'existence de tels groupes. Mais rappelons-nous maintenant l'étude arithmétique faite sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées. Ces formes nous ont conduit à une classe de groupes fuchsiens; nous devions donc penser que les formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées nous conduiraient pareillement à une classe de groupes hyperfuchsiens. C'est ce qui a lieu en effet, et nous avons développé cette étude dans différents Mémoires, (51), (52) et (53). Les coefficients de la forme peuvent, d'une manière générale, être supposés des entiers complexes formés avec les racines d'une équation du second degré à coefficients entiers et à discriminant négatif. Bornons-nous à parler du cas où ces entiers sont $a + bi$. A la forme *indéfinie* f nous associons une forme définie φ dépendant de deux paramètres complexes ξ et η, assujettis à rester à l'intérieur de l'hypersphère de rayon un. C'est en effectuant la *réduction continuelle* de la forme φ que l'on se trouve amené à partager l'intérieur de l'hypersphère en un réseau indéfini de *polyèdres* remplissant une seule fois son volume, et l'on passe d'un polyèdre à un autre par une substitution linéaire (fractionnaire) effectuée sur ξ et η. Ces substitutions en nombre infini forment un groupe : c'est un groupe hyperfuchsien. Ce groupe sera complètement caractérisé par un de ces polyèdres. Un point très important, résultant de notre étude, est que chacun de ces polyèdres *a un nombre limité* (*mais au moins un*) *de points communs avec la surface de l'hypersphère*. La véritable raison de ce fait est que *zero* peut être représenté par toute forme tertiaire indéfinie à indéterminées conjuguées. On sait, d'après Gauss, qu'il n'en est pas ainsi, en général, pour les formes ternaires réelles. Après avoir donné ces exemples très étendus de groupes hyperfuchsiens, nous sommes bien assuré de l'existence de tels groupes; mais il ne faut pas oublier que, dans tous ces exemples, le polyèdre fondamental a un ou plusieurs points communs avec la surface de l'hypersphère limite. Il existe cependant des groupes hyperfuchsiens pour lesquels le domaine fondamental n'a aucun point commun avec la surface de l'hypersphère; nous en donnerons plus loin quelques-uns qui nous ont été fournis par la série hypergéométrique de deux variables. Quant à la genèse générale des groupes hyperfuchsiens, on se rend aisément compte, après les travaux de M. Poincaré sur les groupes fuchsiens, qu'elle constitue, comme chez ces derniers, un problème qui est uniquement d'ordre algébrique; mais, toute représentation géométrique faisant défaut, cette recherche directe serait tellement pénible qu'elle est réellement impraticable.

Parmi les généralités relatives aux groupes hyperfuchsiens, je signalerai la notion capitale des ordres de connexité. A chaque groupe fuchsien correspond un nombre p que M. Poincaré appelle le *genre du groupe*. On doit, dans la théorie des groupes hyperfuchsiens, distinguer deux nombres fondamentaux p_1 et p_2, répondant aux annexions du premier et du second ordre du groupe; quant au nombre p_3, répondant à la connexion du troisième ordre, il est égal à p_1. Voici la définition précise de ces nombres : soit δ un polyèdre fondamental du groupe; ce domaine à quatre dimensions est limité par certains espaces à trois dimensions dont les points se correspondent respectivement deux à deux par les substitutions fondamentales du groupe, et devront, dans ce qui suit, être considérés comme confondus. C'est ainsi que nous disons qu'un espace à m dimensions ($m < 4$) contenu dans δ est fermé, quand les points où cet espace rencontre la limite de δ se correspondent deux à deux; un espace fermé peut nécessairement alors se composer de parties distinctes : nous ne considérons d'ailleurs que des espaces ne se coupant pas eux-mêmes. Un ou plusieurs espaces fermés à m dimensions constituent le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, quand, par ces espaces à m dimensions, on pourra faire passer un espace fermé à $(m+1)$ dimensions, dont ils limitent une partie. Ceci posé, si l'on peut imaginer dans δ un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace fermé à $(m+1)$ dimensions, mais tel que tout autre espace fermé à m dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace fermé à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, nous disons que le domaine δ a une connexion de m^{ieme} espèce d'ordre $p_m + 1$; en faisant $m = 1$, 2, 3, on a les nombres dont il a été parlé plus haut et, comme je l'ai dit, p_1 est égal à p_3.

L'étude des groupes fuchsiens épuisait la recherche des groupes discontinus pour le cas d'une seule variable; c'est qu'en effet, dans ce cas, la seule substitution birationnelle étant la substitution linéaire, la théorie des groupes discontinus est contenue tout entière dans la célèbre théorie de M. Poincaré. Le problème est bien plus étendu dans le cas de deux variables; ici les groupes linéaires ou hyperfuchsiens dont nous venons de parler ne forment que le premier terme d'une suite indéfinie. Il y aurait lieu de faire l'étude des groupes discontinus dont les substitutions sont birationnelles; c'est un problème que je n'ai pas encore approfondi dans sa généralité : j'y reviendrai quelque jour. Mais j'ai toutefois étudié un nouveau cas particulier, qui est, en définitive, un groupe quadratique, différent par conséquent essentiellement du cas hyperfuchsien; j'ai donné à ces groupes le nom de *groupes hyperabéliens*, et c'est encore par des considérations arithmétiques que j'ai été conduit à les envisager; c'est ce que je vais indiquer.

Laissons de côté maintenant les formes à indéterminées conjuguées et revenons aux formes réelles. Considérons (55) les formes quadratiques réelles à quatre variables et, parmi celles-ci, les formes indéfinies qui, mises sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés, présentent deux fois le signe *plus* et deux fois le signe *moins*. A une telle forme nous associons une forme définie renfermant deux paramètres complexes ξ et η ; ici, dans ces paramètres, les coefficients de $\sqrt{-1}$ doivent être supposés positifs. C'est encore la réduction continuelle de cette forme définie qui nous conduit au groupe cherché. L'ensemble des deux demi-plans relatifs aux variables ξ et η se trouve subdivisé en un réseau infini de régions remplissant une seule fois cet espace à quatre dimensions, et l'on passe d'une région à une autre par une substitution de l'une ou l'autre forme :

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right),$$

$$\left(\xi, \eta, \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right).$$

On voit que l'on a ainsi un type de groupe tout à fait distinct du groupe hyperfuchsien, et la différence n'est pas seulement dans la forme analytique de la substitution, mais aussi dans le fait qu'il y a *deux* limites au lieu d'*une seule* au domaine naturel du groupe.

II. — Groupe de transformations.

Sous la dénomination que je viens de transcrire, l'illustre géomètre norvégien Sophus Lie a fondé, dans ces dernières années, une théorie entièrement neuve, qui est incontestablement appelée à jouer un rôle capital dans diverses parties du Calcul intégral. Au point de vue des généralités théoriques, M. Lie a laissé seulement à glaner aux lecteurs de ses beaux travaux : il n'en est pas de même pour ce qui concerne le champ des applications qui est extrêmement étendu. On verra plus loin que les points de vue de M. Lie m'ont été très utiles dans la théorie des surfaces algébriques; ils m'ont permis de même d'aborder une question fort intéressante concernant les équations différentielles linéaires (12) et (56).

Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées. On n'a pas cependant, à ma connaissance, cherché à développer pour les équations linéaires une théorie analogue à celle qui a été donnée par Galois pour les équations algébriques. J'établis une proposition qui semble correspondre au théorème fondamental de Galois, et je suis ainsi conduit à la notion de ce que j'appelle le *groupe de transformations linéaires* correspondant à l'équation différentielle. J'emploie cette expression de groupe de transformations dans le même sens que

M. Lie; il ne faut pas confondre ce groupe avec ce que l'on appelle généralement le *groupe de l'équation linéaire*. Soit une substitution linéaire effectuée sur m lettres $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$S \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1m} y_m, \\ Y_2 = a_{21} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2m} y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m = a_{m1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mm} y_m. \end{array} \right.$$

Supposons que les a soient des fonctions *algébriques* d'un certain nombre de paramètres arbitraires. Si, donnant à ces paramètres deux systèmes de valeurs arbitraires, on obtient, en multipliant les deux substitutions ainsi formées, une troisième substitution qui soit de même forme que les deux premières, c'est-à-dire qui n'en diffère qu'en ce que les paramètres ont un troisième système de valeurs, nous dirons que la substitution (S) définit un *groupe de transformations*.

Considère-t-on maintenant une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels et à intégrales régulières, dont $y_1, y_2, \ldots, y_m$ désigneront un système fondamental d'intégrales, on a la proposition suivante qui est l'analogue du théorème fondamental de Galois dans les équations algébriques :

Il existe un groupe G *de transformations linéaires jouissant des propriétés suivantes :*

Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G.

A ce théorème il faut joindre sa réciproque :

Toute fonction rationnelle de x et de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ainsi que de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, *est une fonction rationnelle de x.*

La question se pose maintenant de la recherche des groupes de transformations linéaires algébriques, tels que G; c'est un problème qui n'offre pas de difficultés théoriques, mais les calculs présentent de grandes complications. Je les ai développés seulement dans un cas particulier d'ailleurs fort étendu; ce cas est celui où, en désignant par $A_1(f), A_2(f), \ldots, A_r(f)$ les r substitutions infinitésimales du groupe, le crochet (A_i, A_{i+k}) est une fonction linéaire de $A_1, A_2, \ldots, A_{i-k-1}$. Nous indiquons ainsi en particulier tous les groupes algébriques de transformations à *deux* paramètres. Ajoutons encore d'une manière générale que l'étude du groupe de transformation d'une équation linéaire est intimement liée à la recherche des polynômes en $y_1, y_2, \ldots, y_m$; $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}$, qui se reproduisent, à un facteur près, quand on effectue sur les y un ensemble de substitutions linéaires.

Plusieurs groupes de transformations offrent un grand intérêt géométrique; un exemple des plus simples est donné par la substitution linéaire $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, où les coefficients a, b, c, d sont réels et où $ad-bc$ est positif; cette substitution transforme en lui-même le demi-plan situé d'un côté de l'axe des quantités réelles. J'ai voulu trouver (50) une substitution analogue, relative à l'espace, transformant en elle-même la portion de l'espace située du même côté d'un plan. A cet effet, j'ai remarqué que la transformation d'un demi-plan (x, y) revenait à une substitution linéaire effectuée sur les variables X, Y, de la forme quadratique

$$(x^2+y^2)Y^2+2xXY+X^2;$$

pareillement, en prenant pour point de départ la forme à indéterminées conjuguées

$$(uu_0+z^2)YY_0+uXY_0+u_0X_0Y+XX_0,$$

où $u=x+iy$, toute substitution linéaire effectuée dans cette forme sur X et Y revient à une transformation relative aux points (x, y, z) situés du même côté du plan $z=0$. Je croyais cette transformation nouvelle, quand je me suis aperçu qu'elle coïncidait avec celle dont s'était occupé M. Poincaré dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, et qu'il avait obtenue par une voie géométrique. La méthode que j'ai suivie donne immédiatement la généralisation du groupe modulaire : on obtient ainsi un groupe discontinu dans lequel le demi-espace se trouve divisé en une infinité de polyèdres à faces sphériques; ce groupe provient des substitutions, à coefficients entiers complexes et de déterminant un, effectuées sur la forme ci-dessus.

Une autre recherche se rattachant à la théorie des groupes est purement arithmétique (33); elle trouve son origine dans l'étude de la transformation de fonctions abéliennes spéciales du genre *trois*, dont je parlerai dans la théorie des fonctions. Partons de la forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées

$$xy_0+x_0y+zz_0,$$

et considérons l'ensemble des substitutions à coefficients entiers complexes formés avec les racines cubiques de l'unité, reproduisant la forme précédente à un facteur constant près k; ce nombre sera nécessairement un entier réel, et, de plus, il doit être la norme d'un nombre complexe formé avec les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire un nombre de la forme $a^2 - ab + b^2$. Ces substitutions ne forment bien évidemment un groupe que si $k = 1$; nous désignerons ce groupe par G. Je définis, comme équivalentes, deux substitutions S et S′ correspondant à la même valeur de k, si l'on a

$$S = S'T,$$

T étant une substitution du groupe G. Le nombre k étant donné, une question très importante se présente pour la théorie de la transformation des fonctions abéliennes à laquelle je faisais tout à l'heure allusion : *c'est la détermination du nombre des systèmes non équivalents*. Je la traite en supposant que k soit un nombre premier; le nombre cherché est égal à

$$2k(k+2).$$

Le groupe G joue encore le rôle essentiel dans le travail suivant (35) qui se rapporte à un point de vue sous lequel on ne considère pas habituellement la théorie des formes algébriques. Généralement, dans cette théorie, on suppose que l'on fait sur la forme une substitution quelconque. Quand il s'agit de la théorie arithmétique des formes à coefficients entiers, ce sont des substitutions quelconques à coefficients entiers que l'on emploie. Il peut arriver cependant que, pour certaines formes, la théorie arithmétique puisse être développée en faisant seulement sur les variables des substitutions linéaires formant un groupe spécial. Ainsi, dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes, M. Hermite a été conduit à étudier certaines formes quadratiques réelles à quatre indéterminées dont la théorie peut être développée comme je viens de le dire. La considération du groupe G conduit pareillement *à isoler des formes quadratiques ternaires générales (à coefficients complexes) certaines formes particulières.*

Soit la forme quadratique ternaire

$$F = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy,$$

et désignons la quantité conjuguée de chaque coefficient par la même lettre accentuée; supposons qu'entre les coefficients de F existent les relations

$$\begin{gathered} a'_2b_3 + b'_3a_2 + b_1b'_1 = 0, \\ a'_2b_2 + b'_3b_1 + b'_1a_3 = 0, \\ a_1b'_1 + b_3b'_2 + b_2a'_3 = 0. \end{gathered}$$

Si l'on fait sur F une substitution linéaire appartenant au groupe G, les coefficients de la nouvelle forme satisferont aux mêmes relations. On voit donc qu'on peut isoler, en quelque sorte, les formes F des formes générales à trois indéterminées, et l'on devra les comparer entre elles par les substitutions du groupe G. On peut alors se poser, sous ce point de vue, le problème de l'équivalence arithmétique de ces formes, avec les différentes questions qui viennent à la suite.

TROISIÈME CHAPITRE.

THÉORIE DES FONCTIONS.

On désigne généralement aujourd'hui, sous le nom de *théorie des fonctions*, la théorie des fonctions *analytiques* de variables complexes ; c'est actuellement un des chapitres les plus importants de l'Analyse mathématique. Elle doit son brillant essor à la découverte de quelques propositions générales, parmi lesquelles se trouvent au premier rang les théorèmes de Cauchy sur les intégrales prises le long d'un contour. Ces lois générales des fonctions analytiques, appliquées à des fonctions spéciales, donnent souvent, avec la plus grande facilité, leurs principales propriétés ; la théorie des fonctions doublement périodiques en offre un mémorable exemple. L'application de ces lois constitue une méthode synthétique qui tend de plus en plus à réduire les calculs ; avec ce secours, bien des problèmes nouveaux peuvent être abordés, et des résultats auxquels avait conduit une longue série de transformations de calcul nous apparaissent souvent avec évidence. Nous avons en même temps le sentiment profond d'avoir la vraie raison d'une proposition particulière, quand nous pouvons la rattacher à quelque théorème général ? Poinsot disait qu'il faut étudier les choses directement et en elles-mêmes : il voulait dire sans doute qu'on doit chercher à les rattacher le plus directement possible aux principes généraux. La Science actuelle des fonctions souscrit pleinement à cette pensée du célèbre auteur de la théorie des couples. J'ai cité plus haut les dont fonctions doublement périodiques ; la façon Riemann pose et résout, dans sa Dissertation inaugurale, le problème des intégrales abéliennes n'est pas moins digne d'être méditée, comme exemple d'une étude synthétique dans la théorie des fonctions.

I. — Théorèmes généraux.

La théorie des fonctions uniformes a fait, en 1876, l'objet d'un travail considérable de M. Weierstrass (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876); c'est à la suite de la lecture de ce Mémoire que je commençai à m'occuper de la théorie générale des fonctions uniformes, dans la pensée de compléter quelques-uns des résultats de l'illustre géomètre.

Mes premières recherches portèrent sur les fonctions entières (13); j'entends, avec M. Weierstrass, par fonction entière une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue du plan de la variable z, comme e^z et $\sin z$. Une question importante était jusque-là restée sans solution, celle du nombre des racines de l'équation qu'on obtient en égalant à une constante une fonction transcendante entière d'une variable. Il peut arriver, en désignant par $G(z)$ une fonction entière, que l'équation $G(z) = a$, a désignant une constante, n'ait pas de racine. L'expression $e^z + a$, par exemple, ne devient jamais égale à a. Considérons donc, d'une manière générale, une fonction $G(z)$ ne devenant jamais égale à a, pour une valeur finie de z. Je me suis proposé d'établir qu'il ne peut exister une seconde valeur finie b, différente de a, que ne puisse prendre $G(z)$; en d'autres termes, il ne peut y avoir plus d'*une* valeur finie que ne soit susceptible de prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière. *Nous montrons, en effet, qu'une fonction* $G(z)$ *qui ne deviendrait jamais égale ni à a ni à b serait nécessairement une constante.*

La démonstration de cette proposition offre l'exemple bien curieux de l'introduction d'une transcendante spéciale dans une question concernant la théorie générale des fonctions. Malgré bien des efforts, il m'a été impossible d'arriver par une voie plus élémentaire à une démonstration complètement rigoureuse du théorème énoncé.

La transcendante dont il s'agit est le rapport ω des périodes de la fonction elliptique considéré comme fonction du carré $x = k^2$ du modèle k. Cette fonction ω de x admet les trois points critiques $0, 1$ et ∞, et le coefficient de i dans cette fonction mise sous la forme ordinaire des quantités complexes est toujours positif. Supposons maintenant, ce qui est évidemment permis, que les quantités a et b soient respectivement *zéro* et *un*. Nous remplaçons dans $\omega(x)$, x par $G(z)$, et c'est l'étude de cette fonction de z, que nous montrons ne pouvoir être qu'une constante, qui nous conduit au résultat énoncé.

Cette idée de la substitution, dans une transcendante convenable, d'une fonction de z, dont on veut étudier les propriétés, est souvent féconde; elle nous a encore guidé dans plusieurs autres circonstances, comme on le verra plus loin. Les démonstrations auxquelles on est ainsi conduit peuvent d'abord paraître détournées; je les crois au contraire aussi naturelles que possible. Ainsi, pour ce qui concerne le théorème précédent, l'inversion de la fonction $\omega(x)$ donne naissance à une fonction uniforme, définie seulement dans une moitié du plan, et ne pouvant prendre, dans la région en dehors de laquelle on ne peut la prolonger, ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*; il est donc naturel de recourir à cette fonction qui offre un exemple de la circonstance dont on se propose précisément de démontrer l'impossibilité pour les fonctions entières.

On peut énoncer un théorème analogue pour les fonctions uniformes $f(z)$ n'ayant dans toute l'étendue du plan que des pôles, d'ailleurs en nombre quelconque, fini ou infini ($\tang z$ offre l'exemple d'une telle fonction). Tandis que, pour les fonctions entières $G(z)$, il ne peut y avoir plus d'*une* valeur finie que ne puisse prendre la fonction pour une valeur finie de la variable, nous avons pour les fonctions $f(z)$ le théorème suivant :

Il ne peut y avoir plus de deux valeurs finies que ne puisse prendre une telle fonction pour une valeur finie de la variable.

Revenons aux fonctions *entières*. Nous n'avons examiné plus haut que le cas où les équations n'auraient pas de racines; la même question se pose ensuite en supposant que les racines soient en nombre limité. Nous montrons qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation $G(z) = a$, $G(z)$ étant une fonction entière, ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme, ou, en d'autres termes (15),

a et b désignant deux quantités finies, $G(z)$ est un polynôme si les équations

$$G(z) = a, \qquad G(z) = b$$

n'ont l'une et l'autre qu'un nombre limité de racines.

La démonstration de ce théorème est délicate; nous ne pouvons en donner qu'une idée.

Nous nous sommes servi précédemment de la fonction elliptique modulaire; nous avons dû employer ici une transcendante un peu différente.

quoique présentant avec la première une grande analogie. Il existe une fonction ω de la variable v n'ayant dans tout le plan que les trois points critiques 0, 1 et ∞, et telle que, en faisant son inversion, on obtienne une fonction uniforme dans le demi-plan et invariable pour les substitutions du groupe modulaire. Cela posé, en supposant que les quantités a et b de l'énoncé soient respectivement *zéro* et *un*, je fais, dans la fonction $\omega(v)$, $v = G(z)$, et j'étudie cette fonction de z

$$\omega[G(z)].$$

C'est cette étude qui me conduit au théorème que je viens d'énoncer ; je montre, en effet, que quand z se rapproche du point ∞ d'une manière quelconque, il y a une des déterminations de la fonction précédente qui est infiniment grande. De la relation inverse $G(z) = v(\omega)$, on conclut alors que le module de $G(z)$ augmente indéfiniment de quelque manière que z se rapproche du point ∞ ; et de là se conclut que $G(z)$ est un polynôme.

Si maintenant nous considérons, comme plus haut, une fonction $f(z)$, uniforme dans tout le plan avec des pôles en nombre quelconque, nous démontrons ce théorème :

Si les trois équations

$$f(z) = a, \qquad f(z) = b, \qquad f(z) = c,$$

où a, b, c sont trois constantes différentes, n'ont qu'un nombre limité de racines, $f(z)$ est une fonction rationnelle de z.

Les théorèmes qui précèdent nous renseignent complètement sur les circonstances exceptionnelles dans lesquelles une équation transcendante peut n'avoir point une infinité de racines. Les méthodes suivies m'ont, de plus, donné facilement la solution d'une question extrêmement intéressante, à laquelle j'arrive maintenant.

M. Weierstrass, dans son célèbre Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes, partage en deux classes les points singuliers d'une fonction uniforme : ce sont les *pôles* et les *points singuliers essentiels*. Soit A un point singulier essentiel *isolé* de la fonction $f(x)$ (nous entendons par le mot *isolé*, qu'on peut décrire autour du point A comme centre, un cercle ne comprenant à son intérieur d'autre point singulier essentiel que A). M. Weierstrass a montré que, dans le voisinage du point singulier A, la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée, c'est-à-dire que, étant donnés deux nombres ρ et ε aussi petits qu'on voudra, on peut trouver à l'intérieur du cercle ayant A pour centre et ρ pour rayon un point pour lequel le module de $f(x) - a$ soit moindre que ε, a désignant une constante quelconque. Ce théorème ne nous apprenait rien sur les valeurs *exactes* de la fonction dans le voisinage du point singulier; j'ai réussi à montrer qu'il y a toujours dans le voisinage de A un nombre infini de points pour lesquels $f(x)$ devient *rigoureusement égal à a, une exception pouvant seulement se produire pour deux valeurs particulières de a.*

De ce théorème résulte une classification pour les points singuliers essentiels isolés d'une fonction $f(x)$. On peut les partager en trois classes :

1° La fonction $f(x)$ peut prendre sans exception toutes les valeurs que l'on voudra dans le voisinage de A.

2° Il peut y avoir *une* valeur exceptionnelle que la fonction ne prendra pas dans le voisinage de A.

3° *Deux* valeurs exceptionnelles peuvent enfin se rencontrer.

C'est ici le lieu d'énoncer un théorème sur les courbes algébriques, auquel nous avons déjà fait allusion dans le Chapitre I : *Toutes les transformations biuniformes d'une courbe en elle-même, ne possédant que des singularités essentielles isolées, sont nécessairement des transformations birationnelles.*

On connaît l'importance de l'admirable théorème de M. Weierstrass sur la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires; c'est là certainement le point capital dans le Mémoire que nous avons cité plus haut. Je me suis proposé (25) d'étendre ce théorème aux fonctions uniformes $G(z)$, continues pour tous les points du plan, à l'exception de ceux qui sont situés sur un cercle C; la fonction peut avoir sur ce cercle une infinité de points singuliers essentiels distribués d'une manière quelconque. Nous considérons donc une suite indéfinie de quantités A se rapprochant indéfiniment du cercle C; l'extension du problème de Weierstrass, c'est-à-dire la formation d'une fonction holomorphe (sauf sur la circonférence C) admettant les points A pour racines se fait assez aisément. Toutefois, dans le cas actuel, la décomposition en facteurs primaires des fonctions $G(z)$ présente une indétermination, qui lui donne un caractère tout autre qu'à la décomposition des fonctions entières. Citons l'exemple suivant qui se rattache à la théorie des fonctions modulaires; soit l'expression générale des racines donnée par

$$A = \frac{b + c - (a - d)i}{a + d + (b - c)i},$$

a, b, c, d étant des entiers réels satisfaisant à $ad - bc = 1$; le rayon du cercle est ici égal à l'unité. On pourra prendre

$$G(z) = \prod \frac{z - A}{z - B} e^{\frac{A-B}{z-B}}, \qquad \text{où} \qquad B = \frac{b + di}{d + bi}.$$

Dans ce produit infini, a, b, c, d prennent toutes les valeurs entières satisfaisant à la relation indiquée.

M. Weierstrass avait encore dans son Mémoire donné la forme analytique de toute fonction ayant un nombre fini de points singuliers essentiels et des pôles en nombre quelconque. Toute cette théorie peut, avec des modifications bien simples, être étendue aux fonctions uniformes possédant un nombre fini n de coupures que j'ai supposées rectilignes (39). Tout d'abord, si une fonction est continue pour tous les points du plan en dehors des coupures, nous montrons qu'elle est la somme de n fonctions *ayant chacune dans tout le plan une seule coupure*. Une seconde proposition nous était nécessaire pour pouvoir arriver à la forme générale d'une fonction ayant n coupures et des pôles en nombre quelconque : c'est le théorème relatif à la décomposition en facteurs primaires.

Nous montrons comment on peut former une fonction uniforme continue dans tout le plan, à l'exception d'une coupure, et admettant une suite infinie de racines se rapprochant indéfiniment de la coupure. Les deux propositions précédentes permettent d'étendre immédiatement aux fonctions uniformes affectées de coupures les diverses propositions données par M. Weierstrass pour les fonctions n'ayant qu'un nombre limité de points singuliers essentiels. Les problèmes de ce genre peuvent être beaucoup étendus, et dans son grand travail sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante, digne continuation des travaux de son illustre maître, M. Mittag-Leffler a pour ainsi dire épuisé la question; le savant géomètre de Stockholm veut bien reconnaitre dans son Mémoire que j'ai, le premier, étendu la théorie des facteurs primaires aux fonctions ayant des lignes de discontinuité circulaires.

Nous arrivons maintenant à une proposition générale d'une tout autre nature; elle est relative aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. Deux fonctions uniformes d'une variable, ayant des points singuliers essentiels, peuvent être liées par une relation algébrique; telles sont deux fonctions doublement périodiques. J'ai d'abord supposé (41) que les deux fonctions, uniformes dans tout le plan, avaient des pôles en nombre quelconque et un nombre fini de points singuliers essentiels.

Dans ces conditions :

S'il existe entre ces deux fonctions une relation algébrique, le genre de cette relation doit être zéro ou un.

Cette forme de l'énoncé est trop restreinte, et voici, sous sa forme la plus générale, le théorème que j'établis :

Si entre deux fonctions analytiques uniformes d'une variable existe une relation algébrique de genre supérieur à l'unité, ces fonctions ne pourront avoir de point singulier essentiel isolé.

Nous entendons toujours par point singulier essentiel isolé un point essentiel tel que l'avons défini plus haut. Les deux fonctions précédentes devant nécessairement avoir des points singuliers essentiels, sinon la relation serait de genre zero, il s'ensuit que ces points essentiels doivent, suivant l'expression des géomètres allemands, former une masse parfaite (*eine perfecte Menge*), ou former des lignes singulières. Le théorème qui vient d'être énoncé a précisément servi à M. Poincaré pour montrer qu'il existait des fonctions n'ayant pas de lignes singulières et ne possédant pas de points singuliers essentiels isolés; un tel exemple est fourni par les fonctions fuchsiennes de genre supérieur à l'unité et existant dans tout le plan. Je viens de parler des fonctions fuchsiennes; elles permettent, comme on sait, d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque de toute courbe algébrique par des fonctions uniformes d'un paramètre, et ce résultat n'est pas une des moins belles conséquences de la théorie que l'on doit à M. Poincaré. Peut-on espérer d'exprimer, d'une manière plus simple que cet auteur, les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque par des fonctions uniformes? Le théorème qui nous occupe permet de répondre négativement à cette question, et vient ainsi encore accroître l'intérêt de la decouverte de l'éminent géomètre.

J'ai donné du théorème énoncé plus haut deux démonstrations essentiellement différentes : la première s'appuie sur la théorie des fonctions fuchsiennes; la seconde consiste à démontrer d'abord le théorème pour une courbe hyperelliptique; elle s'appuie seulement sur la proposition que nous avons précédemment donnée, relativement à la valeur d'une fonction dans le voisinage d'un point singulier essentiel, et l'on passe ensuite aisément au cas général (78). Cette seconde démonstration, quoique plus élémentaire, est beaucoup plus artificielle, et, comme je l'ai déjà dit tout à l'heure dans une circonstance analogue, il paraît plus philosophique, pour démontrer l'impossibilité en question, de s'adresser précisément aux fonctions uniformes réalisant cette expression des coordonnées d'une courbe algébrique à l'aide d'un paramètre.

On ne peut guère espérer trouver des théorèmes généraux sur la forme des fonctions analytiques non uniformes, conçues dans toute leur généralité. J'ai considéré (6) une fonction analytique (uniforme ou non uniforme) d'une variable complexe z, n'ayant dans toute l'étendue du plan ou de la sphère que trois points singuliers; pour toute autre valeur de la variable, cette fonction reste finie et continue, et elle est uniforme dans toute région du plan à contour simple, ne contenant aucun de ces trois points.

Telle serait, par exemple, une intégrale d'une équation différentielle linéaire avec trois points singuliers. *On peut trouver un développement de la fonction, valable pour tous les points du plan, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi par la variable.* En supposant, comme il est permis, que les trois points critiques soient o, 1 et ∞ et en désignant par ω le rapport des périodes de l'intégrale elliptique considérées comme fonctions du carré $z = k^2$ du module, le développement trouvé procède suivant les puissances entières et positives d'une expression linéaire fractionnaire très simple en ω, de telle sorte que sa fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}\right)^n,$$

α, β, γ et δ désignant des constantes convenables. Les déterminations multiples de ω, quand z décrit un chemin quelconque, nous donnent les déterminations multiples de la fonction. J'avais commencé par traiter la question suivante, qui, quoique très facile, n'est pas sans intérêt : soit $f(z)$ une fonction de z n'ayant à l'intérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre d'autre point singulier que l'origine; on peut trouver un développement en série de la fonction valable pour tous les points du cercle, et quel que soit le chemin suivi par la variable. Ce développement procède suivant les puissances positives et entières d'une expression linéaire fractionnaire en $\log z$.

II. — Fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.

Nous avons défini plus haut les groupes que nous avons appelés *hyperfuchsiens;* nous devons nous occuper maintenant des fonctions hyperfuchsiennes, c'est-à-dire des fonctions restant invariables par les substitutions d'un groupe hyperfuchsien. Mais, avant de nous occuper de ces fonctions d'une manière générale, nous allons exposer les recherches qui nous ont conduit à un premier exemple de fonctions hyperfuchsiennes. La théorie des fonctions elliptiques avait donné le premier exemple d'une fonction uniforme d'une variable, ne changeant pas pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires non permutables, faites sur cette variable : je veux parler de la fonction modulaire, c'est-à-dire du module considéré comme fonction du rapport des périodes.

La question se posait de trouver des fonctions de deux variables indépendantes qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions modulaires. Il est clair qu'un tel problème ne peut, de sa nature, être entièrement déterminé; il s'agissait d'indiquer au moins un exemple.

On pourrait croire, au premier abord, que la théorie des fonctions abéliennes est susceptible, d'une manière générale, de conduire à de telles fonctions : on reconnait facilement qu'il n'en est rien.

Prend-on, par exemple, les fonctions abéliennes du premier genre, elles conduisent à un système de trois modules, fonctions de trois variables indépendantes. Ces fonctions se reproduisent pour un groupe d'une infinité de substitutions faites sur les variables; mais ici ces substitutions ne sont plus linéaires. Ainsi donc, laissant nécessairement de côté le cas de deux variables, on passe immédiatement à des fonctions de trois variables, et la forme linéaire des substitutions a disparu.

C'est en étudiant un cas particulier des fonctions abéliennes du genre *trois* que j'ai trouvé une extension cherchée. Considérons la relation algébrique de genre *trois* entre v et u

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y)$$

et l'intégrale abélienne de première espèce attachée à cette courbe

$$W = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{v}.$$

Les périodes de l'intégrale W, considérées comme fonctions de x et y, satisfont à un système de trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes. Soient ω, ω', ω'' de telles solutions. Si l'on pose

$$\frac{\omega'}{\omega} = u, \qquad \frac{\omega''}{\omega} = v,$$

les valeurs de x et y résultant de cette inversion sont des fonctions uniformes de u et v.

Telles sont les fonctions de deux variables indépendantes, qui offrent une grande analogie avec les fonctions modulaires; *elles offrent un type essentiellement nouveau de fonctions uniformes de deux variables indépendantes.*

Ces fonctions ne sont pas définies pour toute valeur de u et v. En choisissant convenablement les trois solutions w, w', w'', nos fonctions x et y ne sont définies, si l'on pose $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$, que pour les valeurs de u et v satisfaisant à l'inégalité

$$(I) \qquad 2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Si nous désignons par le mot *domaine* D l'ensemble des valeurs de u et v vérifiant l'inégalité précédente, on peut dire que les fonctions x et y ne peuvent pas être *étendues* au delà du domaine D.

Ainsi, de même que la fonction modulaire n'est définie que pour les valeurs de la variable situées dans un certain domaine (c'est habituellement la partie du plan située au-dessus de l'axe réel), ces transcendantes ne sont définies que pour le domaine D. De plus, il existe un groupe de substitutions linéaires pour lesquelles les fonctions considérées restent invariables; ces substitutions sont en nombre infini, et deux quelconques d'entre elles ne sont pas permutables. Nous avons donc un exemple de fonctions transcendantes uniformes de deux variables, obtenues de la manière suivante : soit un système d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles

$$(S) \qquad \begin{cases} r = ap + bq + cz, \\ s = a_1 p + b_1 q + c_1 z, \\ t = a_2 p + b_2 q + c_2 z, \end{cases}$$

où les a, b, c sont des fonctions algébriques de deux variables indépendantes x et y. Ces équations ne peuvent avoir plus de trois solutions communes linéairement indépendantes; supposons qu'elles existent effectivement, et désignons-les par ω_1, ω_2, ω_3. Les cas où les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v conduisent à des fonctions uniformes de deux variables, analogues à ces fonctions uniformes d'une variable, obtenues par l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre, et sur lesquelles M. Fuchs a le premier appelé l'attention.

Éclairé par l'exemple précédent et après avoir acquis la notion générale de groupe hyperfuchsien, comme je l'ai expliqué au deuxième Chapitre, je pus traiter le problème général des fonctions hyperfuchsiennes. Comme il a été dit, le groupe par hypothèse est *discontinu* à l'intérieur d'une hypersphère fondamentale; on peut alors former des fonctions uniformes à l'intérieur de l'hypersphère et se reproduisant quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe : ce sont les *fonctions hyperfuchsiennes*. J'en fais l'étude dans l'hypothèse où le domaine fondamental du groupe n'a aucun point commun avec l'hypersphère ou a seulement avec elles un nombre limité de points communs.

Nous montrons d'abord qu'*il existe entre trois fonctions hyperfuchsiennes une relation algébrique*. Ce théorème, facile à établir quand le domaine fondamental n'a aucun point commun avec l'hypersphère, l'est beaucoup moins dans la seconde hypothèse. Dans ce dernier cas, nous avons dû rechercher comment se comporte la fonction dans le voisinage d'un système de valeurs des variables indépendantes correspondant à un *sommet*. Soit $u = \alpha$, $v = \beta$ un tel point; la réponse à cette question est dans le théorème suivant : La fonction hyperfuchsienne est indéterminée pour $u = \alpha$, $v = \beta$, et elle est une fonction doublement périodique de la limite arbitraire du quotient $\frac{u-\alpha}{v-\beta}$. Ce résultat obtenu, l'étude des fonctions peut se poursuivre aisément, sans qu'on soit arrêté par la présence des systèmes de valeurs singulières.

Toutes les fonctions hyperfuchsiennes correspondant à un même groupe peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles, liées d'ailleurs par une relation algébrique.

Dans l'exemple que nous avons donné plus haut, les fonctions uniformes pouvaient s'obtenir par l'inversion des rapports des intégrales d'un système (S) d'équations linéaires simultanées. *Toutes les fonctions hyperfuchsiennes peuvent être ainsi engendrées;* que l'on considère en effet deux fonctions distinctes

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v);$$

formons les trois expressions

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}, \qquad z_2 = u z_1, \qquad z_3 = v z_1;$$

z_1, z_2, z_3 peuvent être considérées comme des fonctions de x et y, et l'on démontre qu'elles satisfont à un système d'équations linéaires telles que (S).

A chaque groupe hyperfuchsien correspond une surface algébrique f, ou mieux une classe de surfaces algébriques qui se correspondent point par point. Ces surfaces présentent ce caractère bien remarquable, de posséder en général des intégrales de seconde espèce. On peut trouver l'expression du nombre de ces intégrales linéairement indépendantes, en entendant par là celles pour lesquelles aucune combinaison n'est égale à une fonction rationnelle des coordonnées. Le nombre p_1, que nous avons déjà considéré dans la question des divers ordres de connexité d'un groupe hyperfuchsien, joue ici un rôle essentiel : le nombre cherché est égal à p_1, et le nombre des périodes de ces intégrales de seconde espèce est également représenté par p_1.

On voit, par l'énoncé précédent, que la surface f jouit d'une propriété spéciale, et nous en pouvons conclure, relativement aux fonctions hyperfuchsiennes, une conséquence qui, pour être négative, n'en présente pas moins un grand intérêt. Nous avons déjà rappelé que M. Poincaré a établi qu'à un groupe fuchsien général correspondait une courbe algébrique quelconque, ou, ce qui revient au même, que les coordonnées d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. Une question analogue se pose d'elle-même pour une surface, relativement aux fonctions hyperfuchsiennes ; ce qui précède nous montre qu'on doit y répondre par la négative. A un groupe hyperfuchsien général ne peut correspondre une surface algébrique quelconque, puisque les surfaces correspondant à un tel groupe hyperfuchsien ont des intégrales de seconde espèce, propriété que ne possède pas une surface algébrique prise arbitrairement, comme nous le verrons bientôt.

La théorie des fonctions de *seconde espèce* s'étend aux fonctions hyperfuchsiennes; on peut obtenir des fonctions uniformes $\Phi(u, v)$ qui se reproduisent à un facteur constant près quand on effectue sur les variables une substitution du groupe. Indiquons une application de ces fonctions de seconde espèce; soient

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad \Phi(u, v) = C,$$

C étant une constante arbitraire, F_1 et F_2 deux fonctions hyperfuchsiennes. Ces équations définissent une fonction y de x, qui satisfait, quelle que soit la constante arbitraire C, à une équation du premier ordre $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, f étant un polynôme. On a ainsi un type nouveau d'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.

Arrêtons-nous maintenant sur une classe particulière de fonctions hyperfuchsiennes; ce sont celles qui proviennent des séries hypergéometriques de deux variables dont nous avons parlé plus haut.

Dans son beau Mémoire sur l'intégration algébrique de l'équation linéaire du second ordre, à laquelle satisfait la série hypergéometrique de Gauss, M. Schwarz avait signalé incidemment un cas particulier remarquable, dans lequel l'inversion du quotient de deux intégrales conduisait à une fonction uniforme: cette fonction, définie seulement à l'intérieur d'un cercle, rentre dans la classe des fonctions fuchsiennes. J'eus alors la pensée de traiter une question analogue relativement à la série hypergéométrique de deux variables.

Cette fonction de x et de y, qui dépend d'ailleurs de quatre arbitraires λ, μ, b_1 et b_2, satisfait à un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles de second ordre, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes. Désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions distinctes de ce système, et considérant les équations $\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$, $\frac{\omega_3}{\omega_1} = v$, mon but a été de rechercher les cas analogues à ceux de M. Schwarz, c'est-à-dire ceux où ces deux équations donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v. Les conditions trouvées sont d'une extrême simplicité : on trouve qu'en prenant deux quelconques des quatre quantités λ, μ, b_1 et b_2, soit, par exemple, λ et b_1, la différence $\lambda + b_1 - 1$ est égale à l'inverse d'un entier positif; et ensuite, en prenant trois quelconques de ces mêmes quantités, soit λ, μ et b_1, la différence $2 - \lambda - \mu - b_1$ est encore égale à l'inverse d'un nombre entier positif. *Les fonctions uniformes, auxquelles on est ainsi conduit, sont des fonctions hyperfuchsiennes.*

Le cas particulier qui nous a donné le premier exemple de fonctions hyperfuchsiennes correspondait à $\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{2}{3}$. Dans l'exemple précédent, comme dans la classe étendue de groupes hyperfuchsiens auxquels nous a conduit la théorie des formes quadratiques, le polyèdre fondamental du groupe avait un ou plusieurs sommets sur la surface de l'hypersphère limite. Nous n'avions pas jusqu'ici donné d'exemple effectif de groupe hyperfuchsien pour lequel le polyèdre fondamental soit tout entier *à l'intérieur* de l'hypersphère : trois exemples nous sont fournis par l'étude précédente; ils correspondent respectivement à

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \tfrac{3}{5}, \quad \text{puis } \tfrac{5}{8}, \quad \text{puis } \tfrac{5}{9}.$$

Ils nous paraissent intéressants, car on peut les traiter complètement et donner les substitutions fondamentales de chacun d'eux. Un cas plus particulier, et de nature différente, nous a aussi occupé (75); c'est un cas limite analogue aux cas où les fonctions fuchsiennes, provenant de la série hypergéométrique, deviennent des fonctions elliptiques. La valeur commune des quatre constantes est, dans notre exemple, égale à $\frac{3}{4}$, et, en prenant convenablement les intégrales, l'inversion donne des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à u et par rapport à v.

Après les groupes hyperfuchsiens, nous avons étudié dans le second Chapitre un autre genre de groupes discontinus, que nous avons appelés *hyperabéliens*. A ceux-ci correspondent également des fonctions, et toutes les fonctions hyperabéliennes correspondant à un même groupe peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles, qui sont d'ailleurs liées par une relation algébrique. A tout groupe hyperabélien, on peut faire correspondre un système de deux équations linéaires simultanées aux dérivées partielles ayant quatre solutions communes linéairement indépendantes, mais liées par une relation quadratique. Les fonctions hyperabéliennes peuvent donc toutes être obtenues de la manière suivante : soit

$$r = as + bp + cq + dz,$$
$$t = a_1 s + b_1 p + c_1 q + d_1 z$$

(les a, b, c, d étant des fonctions algébriques de x et de y) un système de deux équations linéaires ayant *quatre* solutions communes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, linéairement indépendantes, mais liées par la relation quadratique

$$\omega_1 \omega_4 = \omega_2 \omega_3.$$

Le cas où les deux équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent des fonctions uniformes de u et v comprend dans sa généralité les fonctions hyperabéliennes.

J'ai étudié un exemple particulier qui a son origine même dans la théorie des fonctions abéliennes, et qui m'a d'ailleurs offert le premier type des transcendantes hyperabéliennes.

Considérons une courbe du second genre, et désignons, suivant l'usage, par G, H, G' les trois constantes qui figurent dans le Tableau des périodes des intégrales normales. Nous posons

$$H = \sqrt{D}\,\frac{x - y}{x + y}, \qquad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x + y}, \qquad G' = \frac{2\sqrt{D}.\,xy}{x + y},$$

D désignant un entier positif; les trois modules de la courbe du second genre correspondant sont alors des fonctions uniformes de x et y; ces fonctions ne sont définies que pour les valeurs de x et de y, dans lesquelles le coefficient de i est positif; de plus, ce sont des fonctions hyperabéliennes. Relativement au groupe hyperabélien correspondant, il y a une différence essentielle entre le cas où D est un carré parfait et celui où il ne l'est pas; dans le premier, les groupes de substitutions effectuées simultanément sur x et y sont séparément discontinus, et les fonctions trouvées se ramènent aux fonctions modulaires d'une seule variable : on est alors, d'ailleurs, dans un de ces cas de réduction d'intégrales hyperelliptiques aux intégrales elliptiques, dont j'ai fait l'étude. Si, au contraire, D n'est pas un carré parfait, on obtient un exemple d'une véritable fonction hyperabélienne.

III. — Fonctions abéliennes.

La théorie des fonctions abéliennes, envisagée dans sa plus grande généralité, se rattache à la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables indépendantes; nous aurons donc à y revenir dans le prochain Chapitre. Bornons-nous en ce moment à deux théorèmes généraux et à quelques cas particuliers.

Considérons une surface algébrique telle que les coordonnées d'un quelconque de ses points puissent s'exprimer par des fonctions abéliennes de deux paramètres. J'ai montré (30) que *le genre d'une telle surface est au plus égal à l'unité;* c'est une proposition toute semblable à un théorème bien connu dans la théorie des courbes planes, relatif aux courbes dont les coordonnées s'expriment par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre. En s'appuyant sur la notion des intégrales doubles de première espèce attachées à la surface, on arrive avec une extrême simplicité à la démonstration de cette proposition; la même marche fournit immédiatement, et sans le moindre calcul, la démonstration du théorème relatif aux courbes.

On sait que l'on peut former avec les fonctions Θ de n variables indépendantes des fonctions de n variables ayant $2n$ systèmes de périodes. Ces périodes, d'ailleurs, ne sont pas toutes arbitraires, et les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations auxquelles elles satisfont sont bien connues. Riemann avait autrefois affirmé que ces relations devaient nécessairement exister entre les $2n$ systèmes de périodes de toute fonction uniforme de n variables, $2n$ fois périodiques. D'une manière précise, cet important théorème peut s'énoncer comme il suit :

Il existe toujours un système de périodes de la fonction

$$\begin{array}{llll} \Omega_{11} & \Omega_{12}, & \ldots, & \Omega_{1,2n}, \\ \Omega_{21} & \Omega_{22}, & \ldots, & \Omega_{2,2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \Omega_{n,1}, & \Omega_{n,2}, & \ldots, & \Omega_{n,2n}, \end{array}$$

telles que l'on ait, pour toute valeur de α et β,

$$\Omega_{\alpha,1}\Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1} + \Omega_{\alpha,3}\Omega_{\beta,4} - \Omega_{\alpha,4}\Omega_{\beta,3} + \ldots + \Omega_{\alpha,2n-1}\Omega_{\beta,2n} - \Omega_{\alpha,2n}\Omega_{\beta,2n-1} = 0.$$

Riemann n'a pas indiqué la méthode qui l'a conduit à ce théorème. Une conversation que j'eus à ce sujet avec M. Poincaré fut l'origine d'une Note (16) que nous publiâmes en commun, où le théorème était complètement établi. De ce théorème se déduit de suite cette conséquence bien digne d'intérêt : *Toute fonction uniforme* $2n$ *fois périodique de* n *variables indépendantes peut être exprimée au moyen des fonctions* Θ.

A côté de nombreuses analogies, la théorie des fonctions Θ de p variables présente avec la théorie des fonctions Θ d'une seule variable des différences très sensibles, et celles-ci apparaissent surtout dans les questions relatives à la transformation. Il existe cependant pour chaque valeur du nombre p des classes particulières de fonctions Θ, dont l'étude, relativement plus simple, conduit à des résultats se rapprochant davantage de ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques. Un exemple, relatif à $p = 3$, nous est fourni par mes précédentes recherches sur un certain groupe hyperfuchsien. Les fonctions Θ relatives à trois variables se trouvent, comme on sait, définies par une certaine forme quadratique ternaire; nous donnons, dans notre exemple, aux coefficients de cette forme certaines valeurs particulières, où figurent deux paramètres complexes arbitraires u et v. Dans ces conditions, on peut faire correspondre à cette classe de fonctions Θ le groupe hyperfuchsien G, dont je me suis occupé plus haut. Désignons par U et V ce que deviennent u et v quand on effectue sur eux une substitution quelconque de ce groupe. La question qui fait l'objet du travail indiqué (40) est *la transformation des fonctions* Θ *quand on remplace* u *et* v *par* U *et* V. Elle présente la plus complète analogie avec la théorie de la transformation des fonctions Θ d'une seule variable, et j'ai pu employer une méthode analogue à celle qui a été suivie autrefois par M. Hermite dans la théorie des formes en nombre infini des fonctions Θ

d'une seule variable. Les fonctions abéliennes dont nous parlons proviennent en définitive de la relation algébrique entre z et t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y),$$

que nous avons déjà considérée. Nous avons exprimé les deux *modules* x et y par des fonctions hyperfuchsiennes de deux variables u et v. *Nos fonctions x et y jouent dans la théorie de ces fonctions abéliennes le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.* Ces fonctions hyperfuchsiennes peuvent s'exprimer au moyen des fonctions Θ de trois variables, absolument comme on exprime la fonction modulaire au moyen des fonctions Θ d'une seule variable.

On sait combien il est facile de représenter par des séries une fonction doublement périodique. Soit $f(e^x)$ une fonction rationnelle de e^x; si la série $\sum\limits_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(e^{x+m\omega})$ est convergente, elle représentera une fonction doublement périodique avec les périodes $2\pi i$ et ω. On n'avait jamais, que je sache, considéré des expressions analogues, mais relatives à deux variables indépendantes. Soit $f(e^x, e^y)$ une fonction rationnelle de e^x et e^y : je considère la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(e^{x+m\omega+n\omega'},\ e^{y+m\omega_1+n\omega'_1}),$$

les ω et ω' étant des constantes. L'idée de considérer une telle série est assurément banale; ce qui est intéressant, c'est de donner des exemples où la série converge. Je donne des cas très étendus où une pareille série est absolument convergente; elle définit une *expression ayant quatre couples de périodes*. Mais une telle expression ne peut pas en général être une *fonction* quadruplement périodique définie pour toute valeur de x et y, et présentant pour tout système de valeurs finies de ces variables le caractère d'une fonction rationnelle; elle possède en effet des surfaces de singularités essentielles qui empêchent d'en faire le prolongement analytique; car, en allant d'un système de valeurs à un autre arbitraire, on peut être arrêté par les surfaces de singularités. Les expressions précédentes peuvent aisément être développées en séries trigonométriques; j'ai traité complètement un cas particulier qui me donne des séries trigonométriques de deux variables, dont les coefficients ont une loi extrêmement simple et présentent une grande analogie avec ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques. *C'est là un type nouveau de série trigonométrique de deux va-*

riables, dont l'étude mérite, je crois, d'être approfondie. Indiquons ici l'expression sous forme de série :

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}]^2} \frac{e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}]^2},$$

les six constantes ω, ω', α, α', β et β' désignant des quantités réelles quelconques.

Relativement aux fonctions elliptiques, j'ai peu de chose à ajouter aux applications qui en ont été faites plus haut à l'étude des équations différentielles. Mentionnons seulement la recherche (2) des fonctions uniformes d'une variable jouissant des propriétés suivantes :

$$f(z+\omega) = f(z), \qquad f(z+\omega') = f(z)\, S(z),$$

$S(z)$ désignant une fonction doublement périodique aux périodes ω et ω'. Je donne ces fonctions sous forme de produit convergent, et aussi sous forme d'intégrale définie.

J'ai tiré de la théorie des fonctions elliptiques une équation différentielle du second ordre, non linéaire, jouissant de propriétés curieuses. Désignons par ω et ω' les périodes de la fonction elliptique $\operatorname{sn} x$, et soient a et b deux constantes arbitraires ; l'expression $u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega')$, considérée comme fonction du carré $x = k^2$ du module k, satisfait, quelles que soient les constantes a et b à une équation différentielle algébrique du second ordre. Les points critiques des intégrales de cette équation sont *fixes;* ce sont les points $0, 1$ et ∞. De plus, elle admet une infinité d'intégrales algébriques, qui ne sont pas d'un degré déterminé.

QUATRIÈME CHAPITRE.

THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

J'ai réuni dans ce Chapitre mes recherches sur les surfaces algébriques: ces études sont nécessairement liées à la théorie des fonctions algébriques d'une et de deux variables indépendantes. La théorie des fonctions algébriques d'*une* variable a été depuis quarante ans l'objet de travaux considérables, et c'est peut-être à Riemann que l'on doit les notions les plus essentielles sur ce sujet, qui se rattache à tant de problèmes de Géométrie et de Calcul intégral. Beaucoup moins avancée est la théorie des fonctions algébriques de *deux* variables; la lecture des beaux Mémoires d'un des géomètres les plus éminents de notre époque, M. Nœther, professeur à l'Université d'Erlangen, me décida à m'occuper de cette question aussi importante que difficile. C'est en effet par l'étude d'un cas particulier, comme celui-là, que nous pouvons espérer pénétrer dans la théorie générale, encore si obscure, des fonctions de plusieurs variables; on va voir d'ailleurs les différences qui séparent la théorie quand on passe d'une à deux variables, et combien l'analogie, qui si souvent est un guide excellent, pourrait ici devenir trompeuse.

M. Nœther avait principalement étudié la théorie des surfaces au point de vue algébrique, en approfondissant l'étude de ces polynômes adjoints d'ordre $m-4$ (m désignant le degré de la surface) qui sont les analogues des polynômes adjoints d'ordre $m-3$, jouant un rôle si important dans la théorie des courbes planes algébriques. Il est ainsi arrivé à la notion de deux nombres invariantifs fondamentaux. Le premier, désigné par p et communément appelé *genre* de la surface (*Flächengeschlecht*), est égal au nombre des paramètres arbitraires figurant dans les polynômes adjoints Q d'ordre $m-4$. Le second, désigné par p_1 (*Curvengeschlecht*), représente le genre de la courbe mobile d'intersection de la surface donnée avec les surfaces représentées par l'équation $Q = 0$. J'ai tenu à rappeler la définition de ces deux nombres qui, le premier surtout, vont revenir souvent dans la suite.

I. — Intégrales de différentielles totales.

Dans la théorie des courbes algébriques, on ne s'est pas borné au point de vue algébrique, et la considération de certaines expressions transcendantes attachées à la courbe présente le plus grand intérêt. Ces transcendantes sont, comme on sait, les intégrales de la forme

$$\int R(x, y)\, dx, \tag{1}$$

R étant une fonction rationnelle de x et y, celles-ci étant définies par la relation $f(x, y) = 0$, qui définit la courbe. Si nous considérons maintenant une fonction z de x et y définie par la relation algébrique $f(x, y, z) = 0$, on peut faire correspondre à cette surface des intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy, \tag{2}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z, et pour lesquelles la condition d'intégrabilité est supposée satisfaite.

L'étude de ces intégrales était complètement à faire; je la commençai à la fin de 1884. Parmi les intégrales (1), il en est de particulièrement intéressantes : ce sont celles qui restent toujours finies, et qu'on appelle de *première espèce*. Dans mes premières recherches je considérai donc les intégrales de la forme (2), qui restent finies pour tout système de valeurs, finies ou infinies, des deux variables indépendantes x et y.

Dès le début de cette étude, on rencontre une différence bien profonde entre le cas d'une variable et celui de deux variables. On sait, en effet, qu'à une courbe algébrique correspondent en général des intégrales de première espèce; ainsi, pour parler plus nettement, la courbe la plus générale d'un degré donné possède un certain nombre bien connu d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Il en est tout autrement pour les surfaces algébriques : il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce correspondant à la surface la plus générale de degré m. Je montre comment on pourra reconnaître si une surface donnée possède des intégrales de première espèce, et quel est le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes. J'avais supposé d'abord que la surface n'avait pas de singularités ordinaires, mais dans ces questions la complication des singularités n'est la source d'aucune difficulté, car on sait, depuis longtemps, comme l'a montré M. Nœther, dissoudre en quelque sorte une singularité extraordinaire donnée en des singularités ordinaires, en employant une transformation rationnelle convenable.

Les recherches précédentes nous ont permis d'entreprendre l'étude d'une classe interessante de surfaces algébriques, dans laquelle la notion des intégrales de première espèce joue un rôle capital : ce sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, en y ajoutant cette condition qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs des deux paramètres, abstraction faite, bien entendu, des multiples des périodes. Ces surfaces sont les analogues des courbes planes du genre *un*, pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre. Nous montrons tout d'abord que la surface doit être du genre un; en outre, elle doit posséder deux intégrales de première espèce linéairement indépendantes et deux seulement.

J'indiquai encore dans mon premier travail sur ce sujet une troisième condition : considérons l'unique surface adjointe d'ordre $m - 4$ correspondant à la surface et Γ sa courbe d'intersection avec celle-ci en dehors des lignes multiples; la courbe Γ doit être unicursale. Or il résulte d'un théorème, anciennement établi par M. Nœther, que cette dernière condition est toujours remplie dans les surfaces de genre *un*. La condition nécessaire et suffisante pour que les coordonnées d'un point quelconque d'une surface algébrique s'expriment, de la manière indiquée, par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, prend donc la forme remarquable que voici :

Il faut et il suffit que la surface soit de genre un et possède deux intégrales de première espèce linéairement indépendantes.

Nous devions naturellement nous demander à partir de quel degré on rencontre des surfaces jouissant de la propriété précédente. J'ai montré qu'il n'existait pas avant le *sixième* degré de surface de genre *un* possédant deux intégrales distinctes de première espèce : les surfaces étudiées sont donc au moins du sixième degré. On trouve bien effectivement des surfaces du sixième degré dont les coordonnées s'expriment de la manière cherchée : dans l'exemple que j'ai donné, les fonctions quadruplement périodiques se réduisent en réalité à des fonctions doublement périodiques par rapport à chacune des variables prises convenablement. Je n'ai d'exemple effectif, sans cas de réduction aux fonctions doublement périodiques, qu'à partir du neuvième degré, mais je n'ai pas démontré cependant que l'on ne peut pas rencontrer un tel exemple du sixième au neuvième degré ; il y aurait donc à compléter sur ce point les recherches précédentes.

J'insiste encore sur cette condition qu'à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'un seul système de valeurs des paramètres, aux périodes près ; ainsi il existe une surface célèbre du quatrième degré, qui porte le nom de M. Kummer, pour laquelle les coordonnées d'un point s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres, mais cette surface ne rentre pas dans la classe qui nous occupe, car il est facile de vérifier que, dans ce cas, à un point arbitraire de la surface correspondent deux systèmes distincts de valeurs de ces paramètres.

Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici que des intégrales de première espèce; j'ai approfondi aussi la question beaucoup plus difficile des intégrales de différentielles totales de seconde et de troisième espèce. Nous pouvons tout d'abord définir comme il suit les intégrales de *seconde* espèce. Considérons les courbes le long desquelles l'intégrale devient infinie. Soit C une de ces courbes que, sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer une courbe simple de la surface ; je prends alors un cycle infiniment petit entourant cette courbe en un point ordinaire (on peut, par exemple, donner à y une valeur fixe et considérer dans le plan de la variable x un contour infiniment petit autour d'un point de la courbe C, répondant à la valeur prise pour y). Si l'intégrale le long de ce cycle est nulle, nous dirons que la courbe C est une courbe polaire. *Une intégrale de seconde espèce ne possède que des courbes polaires.*

Si l'intégrale le long d'un contour infiniment petit, analogue à celui dont nous avons parlé, n'est pas nulle, cette courbe C sera dite une *courbe logarithmique*, et *l'intégrale sera de troisième espèce*. Dans ce cas, à une courbe logarithmique correspond évidemment une période. Une telle période sera dite *période polaire*.

Nous établissons d'abord que, si une surface est la plus générale de son degré, toute intégrale de cette espèce se réduit à une fonction rationnelle des coordonnées. Ainsi, en faisant abstraction des fonctions rationnelles des coordonnées, il n'y a pas pour une surface quelconque d'intégrales de seconde espèce. La question, que nous avons ensuite abordée, a été de reconnaître si une surface possède des intégrales de seconde espèce autres que des fonctions rationnelles. Elle est beaucoup plus difficile à résoudre que le problème analogue pour les intégrales de première espèce. Nous la résolvons complètement, en la ramenant à une question d'une tout autre nature; nous faisons correspondre à la surface une certaine équation différentielle linéaire ordinaire, et nous avons à rechercher si cette équation admet comme intégrales des fractions rationnelles. Nous retrouverons tout à l'heure cette équation différentielle linéaire, dont le rôle inattendu dans cette théorie parait vraiment bien curieux.

Relativement aux intégrales de troisième espèce, nous pouvons énoncer que, étant donnée une surface algébrique générale et étant considérée une intégrale quelconque de différentielle totale relative à cette surface, cette intégrale (à moins qu'elle ne soit une fonction rationnelle des coordonnées) aura nécessairement des courbes logarithmiques, et *les périodes polaires correspondant à ces courbes logarithmiques seront les seules périodes de l'intégrale.*

Dans le cas où une surface possède des intégrales de seconde espèce, on doit distinguer un certain nombre entier qui représente le nombre de ces intégrales qui sont *distinctes;* nous entendons par intégrales distinctes des intégrales dont aucune combinaison linéaire ne se réduit à une fonction rationnelle des coordonnées. D'autre part, ces intégrales possèdent un certain nombre de périodes; on a le théorème suivant :

Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.

Cet énoncé rappelle une proposition de la théorie des courbes algébriques: au fond, l'analogie est purement dans la forme, les circonstances étant ici entièrement différentes, par le seul fait qu'il faut dans notre énoncé sous-entendre, en parlant des intégrales, *quand elles existent.* Le caractère des deux théorèmes est donc bien différent, et la démonstration dans le cas des surfaces est singulièrement plus délicate que pour les courbes.

La théorie des intégrales de troisième espèce se trouve rattachée à celle des intégrales de seconde espèce par le théorème suivant :

Il n'y a d'intégrales de troisième espèce avec des périodes distinctes des périodes polaires que dans le cas où il y a des intégrales de seconde espèce, et alors le nombre des périodes distinctes des périodes polaires est égal au nombre des intégrales de seconde espèce.

Tels sont, en se bornant aux théorèmes généraux, les points principaux de mes recherches sur les intégrales de différentielles totales algébriques. Nous avons déjà indiqué plus haut une application de cette théorie à l'étude de surfaces algébriques; nous en verrons bientôt d'autres. C'est d'ailleurs un sujet fort vaste, que je ne prétends pas avoir épuisé, mais les points essentiels sont fixés. Peut-être voudra-t-on bien reconnaître que j'ai ouvert dans la théorie des surfaces un nouveau Chapitre; c'est ce qu'exprimait l'éminent professeur d'Erlangen, que j'ai cité plus haut, quand il écrivait dans un Mémoire récent des *Mathematische Annalen* : « Herr E. Picard hat vor einiger Zeit für algebraische Flächen ein neues Forschungsgebiet betreten. »

II. — Des cycles dans les surfaces algébriques.

On connaît toute l'importance de la théorie des cycles dans l'étude des courbes algébriques. Aucune théorie analogue n'avait été tentée pour les surfaces, et, d'autre part, mes précédentes recherches sur les intégrales de différentielles totales me montraient là une lacune importante à combler. J'eus donc tout naturellement la pensée de chercher à poser les bases d'une théorie des cycles dans les surfaces. Je ne tardai pas alors à remarquer que la généralisation peut se faire dans deux directions différentes; il y a à considérer pour les surfaces des *cycles à une dimension ou linéaires* et des *cycles à deux dimensions*; d'où deux théories entièrement distinctes.

En pénétrant dans la première étude, on rencontre dès le début un résultat au premier abord inattendu : c'est qu'en général, pour une surface algébrique, *il n'y a pas de cycles linéaires*, je veux dire qu'ils se réduisent tous à des cycles nuls. Ce résultat nous donne la véritable raison de ce fait, signalé plus haut, qu'il n'y a pas en général d'intégrales de première et de seconde espèce pour une surface; en effet, les cycles linéaires se réduisant à zéro, il ne peut y avoir de périodes différentes de zéro. Il y a cependant des surfaces possédant effectivement des cycles linéaires; telles sont, par exemple, les surfaces déjà considérées dont les coordonnées s'expriment, comme il a été dit, par des fonctions quadruplement périodiques, et qui possèdent manifestement quatre cycles distincts. Nous avions donc à rechercher les cycles linéaires distincts d'une surface algébrique donnée. Dans cette question, la *réductibilité* d'une certaine équation différentielle linéaire joue un rôle essentiel, et c'est précisément l'équation qui nous a déjà été si utile.

Cette question du nombre des cycles distincts peut aussi se ramener à une question de géométrie de situation. L'équation d'une surface algébrique $f(x, y, z) = 0$ revient à deux relations entre six quantités réelles ou à une seule relation algébrique entre cinq quantités réelles. On peut sur ce système de cinq quantités effectuer une transformation birationnelle qui le fasse correspondre à une surface fermée. Nous avons donc ainsi une équation définissant un espace *fermé* à quatre dimensions dans un espace à cinq dimensions : à cet espace fermé correspondront deux ordres de connexité p_1 et p_2, et c'est le premier de ces nombres qui nous intéresse en ce moment. Rien d'ailleurs, dans les généralités qui précèdent, ne nous montre que le nombre p_1 doive être nul ; il était donc indispensable de traiter, comme nous l'avons fait, la question par une autre voie.

Notre attention vient de se trouver portée sur un second nombre p_2, relatif à une connexion de seconde espèce ; c'est ainsi que nous sommes conduit *aux cycles à deux dimensions*. Une surface cyclique ou cycle à deux dimensions peut être défini un continuum fermé à deux dimensions, tel que toute courbe fermée à une dimension tracée sur lui soit un cycle linéaire de la surface. Il n'en est pas du nombre p_2 comme du nombre p_1 ; ce nombre p_2 n'est pas nul en général, *et c'est par suite dans les cycles à deux dimensions d'une surface qu'il faut chercher la généralisation des cycles d'une courbe algébrique.*

Nous nous trouvons maintenant ramené aux expressions transcendantes attachées à une surface algébrique. Je n'ai parlé jusqu'ici que des intégrales de différentielles totales : on peut considérer d'autres expressions transcendantes, comme l'a fait M. Nœther qui a considéré les intégrales doubles de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

Q étant un polynôme adjoint d'ordre $m-4$. On pourrait les appeler des intégrales doubles de première espèce : on peut en effet montrer qu'elles restent toujours finies, quel que soit le champ de l'intégration.

La question de la périodicité des intégrales doubles m'avait depuis longtemps préoccupé. J'ai d'abord cherché pour ces intégrales une première extension de la notion de périodes, mais je fus ainsi conduit à des expressions qui, dépendant du domaine d'intégration de l'intégrale double, ne pouvaient être considérées comme les analogues des périodes de l'intégrale simple. En continuant mes recherches sur les divers ordres de connexité des groupes hyperfuchsiens, j'avais vu l'importance que pourraient avoir pour les intégrales doubles les espaces *fermés* à deux dimensions, contenus dans le domaine fondamental, et j'avais pensé à prendre un tel espace comme domaine d'intégration pour l'intégrale double. Mais j'en étais resté là : une notion essentielle me manquait pour décider si les quantités ainsi obtenues étaient des constantes : je veux parler de l'extension aux intégrales doubles du théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales simples. Aussi, dès que cette extension eut été annoncée par M. Poincaré dans une Note qui fut depuis développée dans un profond Mémoire, je pus poser les principes de la théorie des périodes cycliques des intégrales doubles algébriques.

Reportons-nous aux cycles à deux dimensions, qui viennent d'être définis : *l'intégrale étendue à un tel cycle est une période.*

Quant au calcul effectif de ces périodes, on peut le ramener encore à l'étude d'une équation différentielle linéaire. Cette équation possède en quelque sorte des cycles, c'est-à-dire qu'il existe des chemins partant d'un point et y revenant, qui ramènent chacun une intégrale déterminée avec la même valeur au point de départ. Soit Ω une telle intégrale, si l'on intègre $\int \Omega\, dy$ le long de ce chemin, on aura une période cherchée.

Quand on passe du domaine de deux variables complexes à celui de trois variables, on peut de deux manières différentes étendre les notions relatives aux intégrales multiples. Les résultats que j'ai obtenus à ce sujet se rattachent immédiatement aux recherches précédentes. On peut, en premier lieu, considérer l'intégrale double

$$\int\int \mathrm{A}\, dy\, dz + \mathrm{B}\, dz\, dx + \mathrm{C}\, dx\, dy,$$

étendue à une certaine *surface* à deux dimensions. Bornons-nous à supposer que A, B, C sont fonctions rationnelles des trois variables complexes indépendantes x, y et z. Je cherchai les *résidus* de cette intégrale double, en supposant vérifiée la condition qu'on peut appeler d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z} = 0.$$

En supposant que $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}$, $\mathrm{B} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$, $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}$, P, Q, R et S étant des polynômes en x, y, z et le dernier étant irréductible, on arrive à ce résultat que les résidus ne sont autre chose que les périodes de l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{\mathrm{P}\, dy - \mathrm{Q}\, dx}{\mathrm{S}_z},$$

relative à la surface $\mathrm{S}(x, y, z) = 0$.

On peut, en second lieu, prendre l'intégrale triple

$$\iiint \frac{P\,dx\,dy\,dz}{Q},$$

P et Q étant des polynômes en x, y et z; nous n'avons ici aucune condition d'intégrabilité à faire intervenir, et nous avons cherché les *résidus* de cette intégrale, c'est-à-dire les valeurs qu'elle prend quand elle est étendue à un continuum fermé quelconque à trois dimensions. Voici le résultat : *ces résidus sont les périodes de l'intégrale double*

$$\iint \frac{P\,dx\,dy}{Q_z},$$

cette intégrale double étant relative à la surface $Q(x, y, z) = 0$. Ce résultat me semble intéressant en ce qu'il conduit à envisager sous un nouveau point de vue les périodes des intégrales doubles.

III. — De la transformation des surfaces.

L'étude des courbes algébriques susceptibles de se transformer les unes dans les autres par des transformations birationnelles forme un chapitre fondamental de la théorie des courbes planes dont Riemann, le premier, a montré l'importance et l'intérêt. Une étude analogue n'a pas moins d'intérêt dans la théorie des surfaces algébriques, et mes précédentes recherches m'ont naturellement conduit à m'occuper de cette question. L'étude des surfaces susceptibles de se transformer en elles-mêmes se présentait tout d'abord; M. Schwarz avait démontré que les courbes des genres *zéro* et *un* sont les seules qui puissent être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. J'établis pour les surfaces un théorème analogue, d'après lequel *les surfaces du genre zéro ou un sont les seules qui puissent être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant deux paramètres arbitraires.* Nous entendons d'ailleurs que les deux paramètres figurent dans la transformation de telle manière qu'à un point de la surface correspond, par la transformation et en faisant varier les paramètres, non pas une courbe déterminée, mais un point arbitraire de la surface.

L'examen du cas où il y a seulement *un* paramètre arbitraire dans la transformation conduit à des conclusions bien différentes; dans ce cas le genre de la surface peut être quelconque. On peut même trouver bien aisément les surfaces de genre supérieur à un, et susceptibles d'être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle avec un paramètre arbitraire; pour une telle surface, toute adjointe d'ordre $(m-4)$ la coupe suivant une ou plusieurs courbes mobiles de genre un, dont le module est une constante, et l'on en conclut une expression générale et simple des coordonnées d'un point quelconque de la surface.

Nous avons recherché ensuite les surfaces admettant *un groupe continu* de transformations birationnelles en elles-mêmes sans nous occuper du genre de la surface. Le résultat de cette recherche est contenu dans le théorème suivant :

Si une surface algébrique admet un groupe fini de transformations birationnelles à un nombre quelconque de paramètres, deux cas peuvent se présenter :

1° *Ou bien il y a sur la surface un faisceau de courbes algébriques du genre zéro ou un ;*

2° *Ou bien les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, au moyen de l'inversion de deux intégrales de différentielles totales attachées à la surface, soit*

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u, \\ \displaystyle\int^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v, \end{cases}$$

les P *et* Q *étant rationnelles en* x, y *et* z.

Les surfaces rentrant dans la seconde catégorie méritaient d'être étudiées avec quelques détails; elles sont vraiment les analogues des courbes planes du genre zéro et 1, et leur étude constitue une application de nos résultats généraux sur les intégrales de différentielles totales. Déjà nous avons parlé plus haut du cas où les deux intégrales (1) sont de première espèce; je veux seulement ajouter ici que nous montrons comment des équations (1) on pourra tirer des équations donnant les numérateurs et le dénominateur de x, y, z (numérateurs et dénominateur qui sont des fonctions *entières* de u et v), et c'est la considération de certaines intégrales de différentielles totales de *seconde* espèce qui nous conduit à ce résultat.

Dans le cas où les deux intégrales (1) ont moins de quatre périodes, la surface est nécessairement du genre zéro. La discussion des différents cas qui peuvent se présenter peut être faite complètement. J'indique seulement un résultat relatif, au cas où une des intégrales (1) est de première espèce : les coordonnées de la surface peuvent alors s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre θ, d'un paramètre z et de $\sqrt{R(z)}$, [$R(z)$ étant un polynôme du quatrième degré]. Le type d'une telle surface est fourni par les surfaces réglées du quatrième degré avec deux droites doubles qui ne se rencontrent pas.

Je me suis aussi occupé de la transformation d'une surface en une autre ; j'ai montré comment on peut reconnaître si deux surfaces de genre supérieur à un se correspondent point par point, et j'ai établi notamment, par deux voies différentes, que deux surfaces de genre supérieur à l'unité ne peuvent admettre une infinité *discontinue* de substitutions birationnelles. Je n'ai pas pu traiter les mêmes questions pour les surfaces de genre zéro et un ; c'est d'ailleurs une remarque générale que, pour ces dernières surfaces, beaucoup de problèmes sont plus difficiles que pour les surfaces de genre quelconque. Nous dirons seulement, au sujet de la correspondance de ces surfaces, qu'une condition nécessaire se trouvera exprimée par l'égalité du nombre des cycles à *une* et *deux* dimensions.

J'ai parlé dans un autre Chapitre des équations différentielles de la forme

$$f(y, y', y'') = 0$$

et à intégrale générale uniforme, en insistant sur le cas où une certaine transformation biuniforme de la surface, qui joue ici un rôle essentiel, est birationnelle. Dans ce cas, la recherche de l'intégrale est immédiate, quand le genre de la surface est supérieur à l'unité ; l'intégrale générale ne peut être qu'une fonction doublement périodique de la variable. Quand le genre de la surface est égal à l'unité, sans que les coordonnées d'un point quelconque puissent s'exprimer uniformément en fonction de deux paramètres au moyen de l'inversion d'intégrales de différentielles totales, l'intégrale générale sera encore doublement périodique, et nous montrons comment on pourra l'obtenir. Il serait trop long d'entrer dans plus de détails à ce sujet ; je n'ai voulu qu'appeler l'attention sur la liaison étroite qu'accusent mes recherches entre la théorie des surfaces et certains problèmes concernant les équations différentielles. Il en serait de même pour l'équation plus générale $f(x, y, y', y'') = 0$, quand les points critiques sont fixes. Ainsi, par exemple, si, pour une valeur arbitraire de x, la surface ainsi définie rentre dans la classe des surfaces abéliennes, l'intégration de l'équation différentielle se ramènera à des quadratures. Si elle rentre dans le second type dont nous avons parlé plus haut, l'équation se ramènera à une équation de Riccati.

IV. — Sur des fonctions attachées à certaines surfaces algébriques; surfaces diverses.

La notion des intégrales de différentielles totales peut être étendue; mais, avant de parler des surfaces, montrons comment on peut généraliser la notion des intégrales de différentielles algébriques dans la théorie des courbes algébriques. Nous nous sommes proposé de trouver les fonctions u du point analytique (x, y), uniformes et régulières dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique f, et dont toutes les déterminations se déduisent d'une seule u par des substitutions linéaires $Au + B$, A et B étant des constantes. On voit que, si dans toutes ces substitutions les A sont égaux à l'unité, la fonction u sera une intégrale abélienne attachée à la courbe. Le problème précédent est donc une généralisation du problème des intégrales abéliennes. Nous avons spécialement considéré le cas où la fonction u reste toujours finie. La forme des fonctions u est, dans ce cas, facile à trouver; elle ne contient qu'un nombre limité de paramètres arbitraires. Les fonctions u peuvent évidemment être classées en trois espèces, et l'on peut alors développer une théorie qui est une généralisation facile de la théorie des trois espèces d'intégrales abéliennes. Un problème, à ce sujet, présentait un certain intérêt; dans quels cas l'équation

$$u(x, y) = u \tag{1}$$

donnera-t-elle pour x et y des fonctions uniformes de u. Si l'expression u est de première espèce, la courbe devra être du genre *un*, et les fonctions inverses résultant de (1) sont, ou des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions doublement périodiques de la combinaison $a \log u + b$, a et b étant des constantes. Quand l'expression u est de seconde ou de troisième espèce, la courbe est unicursale; x et y se réduisent à des fonctions rationnelles de u ou de e^{au}.

Comment le problème que nous venons de traiter pour les courbes algébriques pourra-t-il s'étendre aux surfaces? Étant donnée une surface $f(x, y, z) = 0$, les fonctions u du point analytique (x, y, z) analogues aux fonctions du point (x, y) que nous venons d'étudier pour les courbes satisferont aux conditions suivantes. Quand (x, y, z) partant d'un point reviendra à ce point après avoir décrit un chemin se ramenant à un cycle nul, la fonction n'aura pas changé. Si, au contraire, le chemin se ramène à un cycle linéaire effectif de la surface, la fonction u se transformera en $Au + B$: nous n'avons considéré que des fonctions de première espèce. J'ai donné la forme générale de telles fonctions u, qui d'ailleurs bien évidemment n'existent pas pour une surface arbitraire. Leur recherche, quand elles existent, demande des calculs assez longs, mais ne présente aucune difficulté théorique. J'ai développé quelques considérations sur le cas où il existerait deux expressions $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$, telles que les équations

$$u(x, y, z) = u,$$
$$v(x, y, z) = v$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v. Citons en particulier ce résultat, généralisation d'un théorème déjà indiqué, que *le genre de la surface ne peut dans ce cas dépasser l'unité*; de plus, *la surface possède au moins une intégrale de première espèce*.

Je parlerai encore d'un travail (1) qui se rapporte d'une manière moins spéciale à la théorie des surfaces algébriques, et qui est une application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches. J'ai étudié, après M. Appell, les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; ces courbes possèdent un certain nombre de points remarquables où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. Je recherche la forme de la courbe dans le voisinage de ces points. Passant ensuite aux courbes unicursales, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe plane unicursale puisse être considérée comme la projection d'une courbe gauche unicursale dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane : ces conditions nécessaires et suffisantes sont que la courbe plane, supposée d'ordre m, ait m points d'inflexion à l'infini. De ce théorème nous déduisons qu'une courbe gauche unicursale d'ordre m, sans point multiple, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, *possède* $2(m-3)$ *points où la tangente a avec elle un contact de second ordre*.

J'ai étudié aussi les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. Sur chaque génératrice d'une telle surface, il y a deux points pour lesquels le plan tangent à la surface coïncide avec le plan correspondant dans le complexe; le lieu des points ainsi obtenus forme sur la surface une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe, et qui est une ligne asymptotique de la surface. Quand la surface réglée est algébrique, cette courbe est algébrique et son degré est égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface. J'ai appliqué ces résultats à certaines surfaces réglées unicursales. Pour la surface gauche du troisième ordre, on obtient ainsi immédiatement les lignes asymptotiques, déterminees analytiquement par Clebsch : ce sont des courbes gauches unicursales du quatrième ordre, dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, et chacune de ces lignes possède deux points où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. Signalons encore les surfaces du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche; parmi les lignes asymptotiques de cette surface se trouve une courbe gauche du sixième ordre et de genre *un*.

Un autre travail (77) se rapporte au problème suivant : Quelles sont les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales? Tout d'abord s'offre la classe des surfaces réglées unicursales, c'est-à-dire des surfaces réglées définies par les équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions rationnelles d'un paramètre.

En dehors de cette classe de surfaces on aperçoit une surface remarquable du quatrième ordre découverte par Steiner. On sait que cette surface possède un point triple d'où partent trois droites doubles : toutes ses sections planes sont donc des courbes unicursales du quatrième ordre.

La réponse à la question posée est assez curieuse : *La surface de Steiner est la seule surface dont toutes les sections planes sont unicursales, en dehors des surfaces réglées unicursales.*

TITRES DIVERS.

Professeur de Calcul différentiel et Calcul intégral à la Faculté des Sciences de Paris.

Lauréat de l'Institut (Prix Poncelet, 1886. Grand prix des Sciences mathématiques, 1888).

Présenté par la Section de Géométrie :

En cinquième ligne en 1881.

En quatrième ligne en 1884.

En troisième ligne en 1885.

En deuxième ligne en 1886 et 1887.

15488 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.